Año 2012

Facultad de Ciencias Económicas y Sociales

UNMDP

La borrosidad en la inmunidad financiera, una nueva visión de la Matemática de la Inversión

La importancia que las valoraciones económicas están tomando en toda organización, genera una creciente necesidad de incorporar en sus modelos de gestión conceptos relacionados al cálculo financiero modernizado para el tratamiento de la incertidumbre en sus variables determinantes.

Autor

María Antonia Artola

UNIVERSIDAD NACIONAL de MAR DEL PLATA

FACULTAD de CIENCIAS ECONÓMICAS y SOCIALES

Tesis de Maestría en Administración General de Negocios

con mención en Finanzas

Título:

LA BORROSIDAD EN LA INMUNIDAD FINANCIERA, UNA NUEVA VISIÓN DE LA MATEMÁTICA DE LA INVERSIÓN

Maestrando:
CP María Antonia Artola

Director de tesis: Dr. Paulino Eugenio Mallo

diciembre de 2012

Muchas veces la malicia o la estupidez pondrán obstáculos a la nueva idea; de ahí que es preciso luchar arduamente para lograr la tolerancia mutua e incondicional. Sólo así la ciencia florece y avanza, pues su fundamento es la libre experimentación e investigación.

Max Nettlau

TABLA DE CONTENIDO E ILUSTRACIONES

ILUSTRACIONES

La borrosidad en la inmunidad financiera, una nueva visión de la Matemática de la Inversión

PARTE I - PRÓLOGO

María Antonia Artola

RESUMEN

La importancia que las valoraciones económicas están tomando en toda organización, genera una creciente necesidad de incorporar en sus modelos de gestión conceptos relacionados al cálculo financiero modernizado, dando paso a nuevas ideas sobre:

- ✓ Influencia de la magnitud tiempo, que va más allá de la idea: dinero-liquidez.
- ✓ Valor económico determinado por la disponibilidad efectiva temporal de una cantidad de dinero, medible por el diferimiento necesario para su recuperación.
- ✓ Equivalencia financiera presente en los mercados.

Estas concepciones generan el objeto de estudio de la matemática de la financiación, el que se complementa con la matemática de la inversión cuando pasan a analizar conceptos tales como: preferencias, rendimientos o rentabilidades, estando su modelización actual excluida de la incertidumbre por considerarla no matematizable.

Considerando que el propósito de este trabajo es revertir esta última idea sobre la relación existente entre la gestión empresarial con la toma de decisiones en contextos inciertos, es que se ha decidido analizar la obra del catedrático Alfonso Rodríguez (Universidad de Barcelona), por considerar que deja una puerta abierta al expresar en su texto, *"Inmunidad Financiera"*, que: *"Pendiente de contrastación se hallan posibles resultados derivados de la aplicación a este análisis de la Matemática borrosa".*

Palabras clave

modelos de gestión – decisiones financieras – inmunidad financiera – incertidumbre – matemática borrosa

ABSTRACT

Economic evaluations are becoming important in any organization. This creates a growing need to incorporate concepts related to financial calculation modernized into their management models, giving way to new ideas about:

- ✓ Influence of time scale, which goes beyond the idea of cash.
- ✓ Economic value determined by the disponibility of an amount of money measurable for the deferral required for its recovery.
- ✓ Financial equivalence present in the markets.

These ideas generate the object of study of the mathematics of financing, which is complemented with the mathematical analysis of the investment when it analyses concepts such as: preference, performance or profitability, being the current modeling excluded from the uncertainty by considering it not mathematicizable.

Considering that the purpose of this paper is to reverse this last idea about the relationship between corporate management with the taking of decisions in uncertain contexts is that it has decided to analyse the work of Professor Alfonso Rodriguez (University of Barcelona), by considering that leaves an open door when he express in his text, financial immunity, that: "Possible results from the application to the analysis of fuzzy math are pending of contrasting".

Palabras clave en ingles

management models – financial decisions – financial immunity – uncertainty – fuzzy mathematics

INTRODUCCIÓN

Las decisiones de inversión constituyen el estudio imprescindible para lograr conseguir empresas exitosas. Ello se debe a que absorben cantidades importantes de efectivo hoy, que implican consecuencias a mediano y largo plazo, condicionando el desempeño organizacional durante varios años.

Dentro de la gestión empresarial, la evaluación de proyectos de inversión es una de las tareas más significativas de las organizaciones modernas que exige a quienes las dirigen una gran capacidad de análisis. En la literatura específica se pueden encontrar varias herramientas para poder realizar dicha evaluación de un modo racional; entre ellas, podemos mencionar como más representativas y utilizadas, al modelo del valor actual neto (*VAN*) y al de la tasa interna de retorno (*TIR*).

Los cuestionamientos percibidos al analizar la bibliografía tradicional sobre estos modelos, principalmente considerando las desventajas que mencionan, llevan a plantear las siguientes problemáticas:

- El *VAN* determina una rentabilidad absoluta, es decir indica el incremento o disminución de un capital, planteando dicha rentabilidad mediante una tasa exógena o extrínseca introducida por el evaluador lo que implica subjetivismo, siendo generalmente la tasa de interés esperada para inversiones de igual riesgo. Esto significa que los flujos positivos se reinvierten a esa tasa, situación incorrecta, que puede salvarse colocándolos a diferente interés, obteniendo un *VAN modificado.* Por otra parte, no permite comparar proyectos con diferente espacio temporal, lo que puede salvarse trasladando el de menor vida a la del otro, o de forma tal que la duración de uno sea múltiplo de la del otro; o bien valuar ambos considerando una duración común donde: $n \to \infty$. Otro inconveniente es la comparación de proyectos con diferente inversión inicial, para lo cual existen diferentes soluciones que permiten determinar un *VAN* homogeneizado.

- La *TIR* determina una rentabilidad relativa, representada por un tanto de interés endógeno o intrínseco propio del proyecto. El problema es cuando se producen múltiples tasas en proyectos no simples, con flujos alternados entre positivos y negativos. Además tiene como supuesto que los ingresos del proyecto se reinvierten a la *TIR* y los egresos se financian a la *TIR*, ambas situaciones incorrectas, lo que puede solucionarse calculado diferentes tasas para ingresos y egresos, determinando una *TIR modificada.*
- En ninguno de los métodos mencionados se utilizan herramientas propias de la matemática de la incertidumbre para su determinación, forzando decisiones con herramientas derivadas de la Estadística (que es apropiada para contextos de riesgo). Considerando que en todo proyecto de evaluación existe incertidumbre en una o varias de las variables intervinientes: en la determinación futura de los flujos, tanto ingresos como egresos, en la tasa de descuento, en el momento de efectivización de los flujos, etc., una importante cantidad de estudiosos han ideado mecanismos para mejorar estos modelos, reexpresándolos mediante el uso de matemática borrosa que da excelentes resultados en la toma de decisiones, tanto de ordenamiento como de selección, generalmente sin conflicto entre ambos mecanismos (*VAN* vs. *TIR*).

Para solucionar los problemas que plantean los modelos tradicionales se pensó la conveniencia de analizar el tratamiento dado por el catedrático Alfonso Rodríguez, a las operaciones que denomina "de Inversión", propuesta que considera como el mejor reemplazo de la *TIR* (por estimar que ésta tiene algunos errores conceptuales al establecer que no mide rentabilidad).

Para este autor el uso de la *TIR* induce a una confusión conceptual entre rendimiento e interés, considerando que aquellos que la utilizan dan a esta herramienta la finalidad de ser una medida de rentabilidad, cuando realmente tiene el carácter de interés implícito, que contiene la acumulación propia del régimen de capitalización a interés compuesto. Fundamenta su postura estableciendo las siguientes diferencias:

- ✓ El interés es un precio que el mercado da al dinero en retribución de liquidez cedida, se define en condiciones de *equilibrio* de manera externa y exógena a la inversión, siempre toma valores positivos.

- ✓ En rendimiento, por el contrario, es una magnitud interna a la inversión que se fija en condiciones de *desequilibrio*, por lo tanto su naturaleza es endógena y marginal, puede tomar valores positivos o negativos.

Finalmente se pretender adecuar la propuesta del catedrático estudiado, utilizando la Matemática Borrosa, bajo el supuesto de análisis de operaciones de inversión en contextos con escasa o nula información, es decir inciertos, para que dicho modelo sea una verdadera herramienta de gestión.

Para lograrlo se propone, para la resolución de los problemas (casos teóricos en condiciones de incertidumbre), la aplicación de intervalos de confianza o números borrosos triangulares (*NBTs*), siendo los primeros un caso particular donde el grado de conocimiento de la serie de datos es cero, por supuesto ambas son formas que desarrolla la Matemática Borrosa, con sustento en la teoría de los subconjuntos borrosos, que surge a raíz de considerar una lógica multivaluada en contraposición a la lógica bivalente o formal, para matematizar la incertidumbre implícita en las variables intervinientes en todo proceso de análisis de evaluación de proyectos de inversión.

Para cumplimentar dicho propósito, se describirá brevemente el modelo en situación de certeza para luego adaptarlo al considerar incertidumbre en alguna de las variables de análisis incorporada y, posteriormente, desarrollar un caso práctico sencillo que permita valuar sus resultados en confrontación con las herramientas tradicionales (*VAN* o *TIR*), expresando las conclusiones sobre la mejora o no, enfocado el análisis a la toma de decisiones, que es el principal objetivo de la presente propuesta.

La borrosidad en la inmunidad financiera, una nueva visión de la Matemática de la Inversión

PARTE II - MARCO TEÓRICO

María Antonia Artola

OPERACIONES FINANCIERAS

1. Conceptos básicos

Dentro de este apartado se presentarán las definiciones de los conceptos que forman parte de la obra del catedrático Alfonso Rodríguez y que comprenden resumidamente:

- Los **conceptos elementales**, formados en el

  → campo discreto por los *CAPITALES*
  → campo continuo por los *FLUJOS*

- Las **operaciones financieras**, clasificadas en:

→ **de financiación - *OFF***, generalmente contractuales donde la diferencia entre los dos conjuntos de capitales o flujos, *input* y *output*, es el interés → entendido como precio de satisfacción por el ahorro o costo financiero de la liquidez, es decir es el precio por utilizar cierto capital en el tiempo, lo que forma un valor agregado a los productos o bienes consumidos.

En estas operaciones *"… el sujeto activo o financiante facilita al pasivo o financiado la capacidad adquisitiva y liquidez que le son necesarias para la ejecución de un plan económico, sea de consumo o de producción. Con ello, el sujeto activo no asume titularidad alguna en tal plan económico, sino que se limita a colaborar en él, haciéndolo factible mediante la prestación del servicio financiero… Se configura así el **interés** como el precio de un servicio y, a la vez, como retribución al ahorro que lo permite, por lo que adquiere la naturaleza económica de renta, la **renta del ahorro…**"* (Rodríguez (1), 1994:5).

En simbología → $\left\{(C_r, T_r)\right\} \sim \left\{(C_s^{'}, T_s^{'})\right\}$, representa la equivalencia financiera para una *OFF*.

→ **de inversión - *OFI***, dependen de un análisis marginal, es decir pretenden un rendimiento marginal excedente (que supere el costo). No se someten a las leyes de mercado, pero son su referencia para valorar el desequilibrio marginal.

En éstas *"… el sujeto participa activamente en el plan económico, compartiendo o asumiendo íntegramente la titularidad"*, es decir *"… la renta del inversor se distingue siempre de la renta del ahorro por su carácter diferencial o marginal, no siendo ya la retribución a un factor, sino el premio al acierto del plan inversor y la compensación por su riesgo"* (Rodríguez (1), 1994:6).

En simbología → $\{(C_r, T_r)\} \not\approx \{(C'_s, T'_s)\}$, representa el desequilibrio ante la equivalencia financiera para una *OFI*.

A su vez, las operaciones financieras pueden diferenciarse en:

- **ciertas**, donde son conocidos los conjuntos financieros que integran la operación, tanto activo como pasivo, y también son determinadas las componentes de capitales o flujos que definen sus elementos, e
- **inciertas**, donde siempre existe un grado de incertidumbre en alguno de datos, siendo esto más frecuente en las operaciones de inversión.

La importancia de este estudio reside en la *necesidad* de reconocer el efecto, de refinanciación o de reinversión, producido por el mantenimiento o incorporación de intereses o rendimientos devengados (no exigibles).

Esto conlleva a un análisis dinámico-continuo, que no debe confundirse con la noción de capitalización continua, e implica definir el concepto de *plazo medio* para operaciones complejas, y de esta forma establecer adecuadamente rendimientos relativos.

En lo pertinente a las *operaciones financieras de inversión*, podemos identificar dos características:

- ✓ la **inmovilización**, que representa el esfuerzo del inversor y es la base para la determinación de tasas de interés y rendimientos propios, y
- ✓ el **rendimiento**, representado por el resultado propiamente dicho de dicho esfuerzo.

El análisis financiero se fundamenta en la existencia la valuar la liquidez que surge de un diferimiento en la disponibilidad de un capital, ya sea mediante la determinación de grados de preferencia o de su valoración propiamente dicha.

El análisis convencional actual prescinde de la *inmovilización*, surgiendo de esta manera la aplicación de una herramienta muy poderosa conocida con el nombre de *valor actual neto (VAN)*, que representa el análisis del rendimiento absoluto de un flujo futuro de ingresos, frente a una inversión actual.

El análisis de *inmovilización* considera que las inversiones se ven afectadas por la dispersión, o *volatilidad*, de las tasas de interés, buscando un efecto inmunizatorio de tal afectación.

Se pretende presentar un estudio sin limitación con respecto al comportamiento futuro de las tasas de rendimiento, es decir admitiendo incertidumbre en los cambios de los tipos de intereses, considerándolo como una variable propia del modelo.

Otra herramienta utilizada en el análisis tradicional, es la *tasa interna de retorno (TIR)*, que desconoce el desequilibrio, porque utiliza una tasa de interés, como sinónimo de rendimiento relativo, cuando son magnitudes totalmente diferentes.

Lo que se pretende es determinar la *tasa financiera de rendimiento (TFR)*, que respeta la naturaleza de las operaciones de inversión, en contraposición con lo que expresa la *TIR*, representando una ley de equilibrio en mercados de ahorro.

- Los **tipos de interés**, pueden dividirse en:

→ **fijos**, representan los ambientes financieros simples, donde aparece una ley financiera única con precio constante, sin estacionalidad.

→ **variables**, propios de los ambientes financieros compuestos, dando origen a las denominadas *estructuras de tipos de interés (ETTI)* con relación a los plazos, las que para su simplicidad se las considera continuas y se fijan por tramos, en estas operaciones surgen las leyes financieras dinámicas, que por supuesto incluyen el concepto de reinversión financiera.

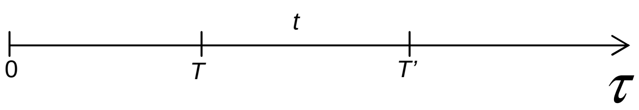
2. Introducción al modelo matemático

Como primer paso se introducirán algunas definiciones, con su correspondiente simbología, para abordar el tema desde el punto de vista matemático, presentando a:

t → como la magnitud tiempo,

τ → que simboliza el transcurso del tiempo desde un origen, y finalmente

t_T → indica la cantidad de magnitud tiempo, otra forma de expresarlo sería mediante el intervalo: $[T, T']$ y mediante una gráfica de tiempo tendríamos:



C → representa la cuantía monetaria, denominada *Capital financiero*

C_τ → expresa o determina el inicio de la disponibilidad desde el punto de vista convencional

(C,T) → indica una cuantía dotada de grado de liquidez, denominada *capital financiero cierto*, expresada como magnitud extensiva bidimensional, es decir en función de la cuantía y del diferimiento; la primera muestra la capacidad adquisitiva de un activo financiero en unidades monetarias, mientras que la segunda define su liquidez en unidades temporales, es decir se muestra monetaria y temporal a la vez.

Como segundo paso se mencionarán las definiciones y postulados en que se sustenta el modelo matemático y que se resumen de la siguiente manera:

<u>Primera definición</u>: Capital *financiero cierto*

$(C,T) \in F \quad \forall (C,T) / C,T \in R^{+}$, indica que son números reales positivos, dentro de un conjunto universal de todos los capitales financieros ciertos, simbolizado con *F*.

Segunda definición: Equivalencia *financiera*, que se simboliza como "~" y debe satisfacer los siguientes principios:

- **Principio de homogeneidad respecto de las cuantías**, que dice: *"Si dos capitales son equivalentes financieramente, también lo son aquellos que, conservando invariantes los diferimientos, mantienen la relación o razón entre las cuantías. Dicho de otro modo, la equivalencia persiste si sólo varían las cuantías y, además, proporcionalmente"* (Rodríguez (1), 1994:16).
- **Principio de preferencia por la liquidez o de positividad del interés**, que establece: *"Si dos capitales son equivalentes financieramente, la diferencia entre sus cuantías y la diferencia entre sus diferimientos tienen el mismo signo, es decir, la razón entre tales diferencias es siempre positiva. Dicho de otro modo, entre capitales equivalentes el capital de menor cuantía es siempre de menor diferimiento –mayor liquidez- o viceversa"* (Rodríguez (1), 1994:16).

En símbolos, en *F,* sería: $(C,T) \sim (C^{'},T^{'})$, donde además los elementos deben satisfacer la relación: $E(C,C^{'},T,T^{'}) = 0$, cumpliendo con las siguientes propiedades:

- Reflexiva: $(C,T) \sim (C,T)$, por lo tanto $E(C,C,T,T) = 0 \quad \forall C,T \in R^{+}$
- Simétrica: $(C,T) \sim (C^{'},T^{'}) \quad \Rightarrow \quad (C^{'},T^{'}) \sim (C,T)$, por lo tanto
  $E(C,C^{'},T,T^{'}) = 0 \quad \Rightarrow \quad E(C^{'},C,T^{'},T) = 0 \quad \forall C,C^{'},T,T^{'} \in R^{+}$
- Transitiva: $(C,T) \sim (C^{'},T^{'}) \wedge (C^{'},T^{'}) \sim (C^{''},T^{''}) \quad \Rightarrow \quad (C,T) \sim (C^{''},T^{''})$, por lo tanto
  $E(C,C^{'},T,T^{'}) = 0 \wedge E(C^{'},C^{''},T^{'},T^{''}) = 0 \quad \Rightarrow \quad E(C,C^{''},T,T^{''}) = 0$
- Homogeneidad: $(C,T) \sim (C^{'},T^{'}) \quad \Rightarrow \quad (k \cdot C,T) \sim (k \cdot C^{'},T^{'}), \forall k \in R^{+}$, por lo tanto
  $E(C,C^{'},T,T^{'}) = 0 \quad \Rightarrow \quad E(k \cdot C,k \cdot C^{'},T,T^{'}) = 0, \forall k \in R^{+}$
- Positividad: $(C,T) \sim (C^{'},T^{'}) \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta C}{\Delta T} > 0 \,/\, \Delta C = C^{'} - C, \Delta T = T^{'} - T$

  $E(C,C^{'},T,T^{'}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta C}{\Delta T} > 0 \,/\, \Delta C = C^{'} - C, \Delta T = T^{'} - T$

Postulado 1: ***Existencia de capital equivalente***, implica la existencia de un *"solo"* capital equivalente, formalmente sería: $\forall \sim, T^{'}, (C,T), \quad \exists C^{'} \,/\, (C^{'},T^{'}) \sim (C,T)$.

Se deduce de este postulado el concepto de *valor financiero*, que representa la cuantía de un capital equivalente en cualquier diferimiento, es decir *C'* será el valor financiero en *T'* del capital *(C,T).*

<u>Tercera definición</u>: *Diferimiento medio*, para este concepto se definen:

$\{(C_r, T_r)\}, \quad r = 1, 2, \ldots, n$ como un conjunto finito de capitales ciertos

C_r^0 como el valor financiero en T_0

para una relación de equivalencia $(C_r^0, T_0) \sim (C_r, T_r)$

siendo T_0 el *diferimiento medio* al que simbolizaremos con ***T*** y

satisface la condición: $\sum_{r=1}^{n} C_r^0 = \sum_{r=1}^{n} C_r$, denominando *cuantía agregada* a $\sum_{r=1}^{n} C_r$ simbolizándola simplemente como ***C***.

En resumen se puede afirmar que el diferimiento medio ***T*** supone la concentración de la cuantía agregada ***C*** en un solo momento de tiempo, manteniéndosela equivalencia financiera y reduciendo la dispersión de la distribución con rigor financiero (Rodríguez (1), 1994:18).

<u>Cuarta definición</u>: *Suma financiera*, responde al concepto de cuantía agregada de un conjunto finito de capitales ciertos y cuyo diferimiento es el diferimiento medio, siempre para una relación de equivalencia. En símbolos sería:

$$\sum_{r=1}^{n} \{(C_r, T_r)\} \equiv (\boldsymbol{C}, \boldsymbol{T})$$

<u>Postulado 2</u>: *Extensión de la equivalencia financiera a conjuntos de capitales*, implica decir que todo conjunto finito de capitales financieros ciertos es equivalente a su suma financiera, en símbolos sería:

$\{(C_r, T_r)\} \sim (\boldsymbol{C}, \boldsymbol{T}), \quad \forall \sim, \quad \{(C_r, T_r)\}$, con esta extensión se puede prolongar la definición de equivalencia entre capitales a los conjuntos de capitales ciertos, es decir *dos conjuntos de capitales ciertos son equivalentes si sus respectivas sumas lo son*, en simbología queda:

$$\{(C_r, T_r)\} \sim \{(C_s^{'}, T_s^{'})\}; \quad r = 1, 2, \ldots, n;\ s = 1, 2, \ldots, m \qquad \Rightarrow \quad (\boldsymbol{C}, \boldsymbol{T}) \sim (\boldsymbol{C}^{'}, \boldsymbol{T}^{'})$$

En conclusión, este postulado permite la *reducción financiera* de un conjunto finito de capitales cierto a un solo capital equivalente.

Quinta definición: ***Flujo financiero cierto***, representada por un ente matemático complejo y binario definido por una función de denominada *intensidad*, para cierto dominio conocido como *campo.* En símbolos sería: $\left[c(\tau),(O,Z)\right]$*,* donde:

$c(\tau)$ representa la función de densidad y

(O,Z) el intervalo temporal del campo del flujo.

Además, se puede considerar a ***W*** como el conjunto de los flujos financieros ciertos de tal forma que: $[c(\tau),(O,Z)] \in \boldsymbol{W} \qquad \forall [c(\tau),(O,Z)]$.

Simbolizando **F** el conjunto de todos elementos, sean capitales o flujos financieros ciertos, de tal forma que $\boldsymbol{F} = F \cup \boldsymbol{W}$.

Sexta definición: ***Cuantía acumulada y diferimiento medio de un flujo***, considerando ***C*** a la primera, se encuentra representada por la integral de la función de intensidad definida en el intervalo temporal, tal que:

$\boldsymbol{C} = \int_0^Z c(\tau)d\tau$, y

$\boldsymbol{T_0}$ al diferimiento medio, siendo aquel que satisface la siguiente condición:

$\int_0^Z c(\tau)\, f(\tau,T_0)d\tau = C$, donde

$f(\tau,T_0)$ representando al *factor financiero*, que respeta la equivalencia financiera reduciendo la dispersión de la cuantía acumulada, la que fuera considerada como una distribución continua en el intervalo temporal.[1]

Séptima definición: ***Suma financiera de un flujo*** representa el capital financiero cierto cuya cuantía es la acumulada del flujo y su diferimiento, el medio. En símbolos:

$\sum\left[c(\tau),(0,Z)\right] \equiv (\mathrm{C,T})$

Postulado 3: ***Extensión de la equivalencia financiera a los flujos financieros***, parte de considerar que todo flujo financiero cierto es equivalente a su suma, es decir:

$[c(\tau),(0,Z)] \sim (\boldsymbol{C,T}), \qquad \forall \sim,[c(\tau),(0,Z)]$

[1] Tiene el mismo fundamento que el vertido anteriormente, para el concepto *Diferimiento medio*.

Esto significa que se puede prolongar la definición de equivalencia financiera a los flujos considerando que: dos flujos son equivalentes $[c(\tau),(0,Z)] \sim [c^{'}(\tau),(0^{'},Z^{'})]$,

si financieramente sus sumas son equivalentes $(\boldsymbol{C,T}) \sim (\boldsymbol{C^{'},T^{'}})$.

Por supuesto también esta equivalencia mantiene las propiedades de reflexividad, reciprocidad y transitividad sin necesidad de comprobarlas, en cuanto al resto se puede indicar que:

El principio de homogeneidad debe interpretarse desde el punto de vista de las intensidades de los flujos, expresando que dos flujos equivalentes siguen siéndolo si sus intensidades mantienen la proporcionalidad, es decir si son multiplicadas ambas funciones por la misma constante, en símbolos:

$$\int_0^Z k \cdot c(\tau) d\tau = k \cdot \int_0^Z c(\tau) d\tau = k \cdot \boldsymbol{C}, \qquad \forall k \in \boldsymbol{R}^{+}$$

El principio de positividad debe interpretarse como la correspondencia existente entre la cuantía acumulada y diferimiento medio superiores e inferiores.

Este postulado permite la reducción financiera de un flujo a un solo capital equivalente, con la finalidad de sustituir en las equivalencias por el capital suma sin alterar el equilibrio financiero; de esta forma se denomina *valor financiero* del flujo, en cierto diferimiento, al valor financiero de su suma.

<u>Octava definición</u>: ***Capital financiero aleatorio*** está asociado a la idea de variable aleatoria definida para una cuantía aleatoria, ξ y un diferimiento aleatorio, η. Siendo su valor aleatorio $\gamma = \xi \cdot f(\eta, T)$, representando $f(\eta, T)$ el *factor financiero* aleatorizado.

Un concepto que acompaña esta idea es el *valor financiero medio* en *T*, diferimiento, como la esperanza matemática, $E(\gamma)$.

<u>Novena definición</u>: ***Flujo financiero aleatorio*** es un ente matemático aleatorio complejo y binario, expresado por una *intensidad aleatoria*, $\xi(\tau)$, en un cierto dominio denominado *campo,* $(0,Z)$. En símbolos: $[\xi(\tau),(0,Z)]$

En valor financiero de un flujo aleatorio, en un diferimiento *T*, está representado por su variable aleatoria: $\gamma = \int_0^Z \xi(\tau) \cdot f(\tau, T) d\tau$, repitiendo los conceptos sobre *factor financiero* y *valor financiero medio* en *T* vistos en capital financiero aleatorio.

<u>Décima definición</u>: *Operación financiera* es un ente matemático complejo y binario formado por *miembros*, subconjuntos o partes de un conjunto financiero universal ***U***, tal que:

$(\boldsymbol{M},\boldsymbol{N}), \qquad \forall\ \boldsymbol{M},\boldsymbol{N} \subset \boldsymbol{U}$

Si la relación de la operación es de equivalencia, $\boldsymbol{M} \sim \boldsymbol{N}$ decimos que es una *operación de financiación*, en cualquier otro caso se trata de una *operación de inversión*.

Si $\boldsymbol{M},\boldsymbol{N} \subset \boldsymbol{F}$, la operación es *cierta*, de lo contrario será *aleatoria*. De esta forma únicamente las operaciones ciertas pueden ser propiamente de financiación debido a que la relación de equivalencia sólo se define en $R(\boldsymbol{F})$.

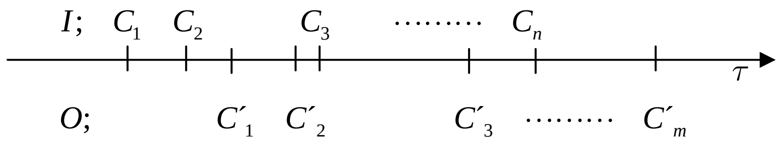
Por otra parte si no participan flujos en los miembros de la operación, será *discreta*; en otro caso será *continua*, tanto para las ciertas como para las aleatorias.

3. Operaciones financieras de inversión - *OFI*

Repitiendo y resumiendo conceptos ya expuestos, son aquellas operaciones que contraponen capitales financieros o flujos: *INPUT,* capital original con *OUPUT*, capital final o monto, en simbología:

$$\left.\begin{array}{l} I,(C_r,T_r);r=1,2,3,\cdots,n \\ O,(C'_s,T'_s);s=1,2,3,\cdots,m \end{array}\right\} \Rightarrow C=\sum_{r=1}^{n} C_r ; C'=\sum_{s=1}^{m} C'_s$$

En un eje temporal sería:



Miden la disponibilidad de una cuantía, que se concreta mediante leyes financieras que implican cierta preferencia.

Con respecto a la ley financiera, puede ser:

- Simple $\Rightarrow$ donde el interés es único y estacionario
- Compuesta $\Rightarrow$ donde hay varias leyes financieras estacionarias

Tienen carácter temporal:

- Estático $\Rightarrow$ es determinado y cierto
- Dinámico $\Rightarrow$ tiene una incuestionable volatilidad en el tipo de interés

El dinamismo temporal puede darse en:

- Las leyes financieras no estacionarias, con un interés en función del tiempo
- Con un interés variable, en función de la magnitud tiempo

Estas operaciones derivan en una serie de conceptos que se pueden resumir de la siguiente manera:

1. inmovilización financiera → explica el esfuerzo del inversor, mediante la determinación de rendimientos brutos, netos, relativos.
2. rendimiento → es el resultado del esfuerzo.

En el análisis tradicional no se calcula la inmovilización, por resultar complejo ya que no es igual para cada unidad monetaria, es decir es diferente y variable, esta circunstancia impide conocer el costo financiero de la inversión.

El *VAN* establece un rendimiento absoluto y la *TIR* pretende dar un rendimiento relativo, pero viola el sentido de "relativo" porque no determina la inmovilización financiera.

4. La magnitud Inmovilización financiera

Este concepto representa una magnitud compleja formada por la **cuantía**, diferencia entre *input* y *output* y el **plazo**, cuya asignación es problemática. En simbología: [***C,t***].

El *VAN* evita el problema del plazo actualizando a un mismo momento los *input* y *output*, elige para homogeneizar el momento actual conforme a leyes financieras que dan equivalencia en el mercado, obteniendo un *rendimiento absoluto neto*.

Cuando se pretende determinar un rendimiento relativo, se puede calcular:

- Productividad → que representa la relación entre rendimiento y cuantía de los factores de la producción
- Rentabilidad → que representa la relación entre rendimiento y costo de los factores de la producción

La *TIR* intenta resolverlo, pero confunde interés con rendimiento, el primero representa el precio del servicio financiero pero carece de naturaleza marginal y diferencial.

La solución que se plantea para el cálculo de la **inmovilización financiera**, es la determinación de un **plazo medio**, <u>*equivalente*</u> de los plazos individuales superpuestos, que se diferencia de la *duration* en la consideración de los valores actuales, no simplemente de las cuantías.

Para entrar en el análisis de esta imprecisión del plazo surge un nuevo concepto que deberá definirse, de acuerdo a lo ya dicho, como *plazo financiero medio equivalente (PFM)*, que es aquel *"… capaz de sustituir la variedad de plazos individuales superpuestos sin pérdida alguna de sus propiedades ante la equivalencia financiera que referencia y fundamenta nuestro análisis"* (Rodríguez (2), 1994:6).

La primera aproximación a este concepto se la encuentra en la definición de la *duration*[2] de un bono desarrollada por Macauly, la que será complementada con la noción de *diferimiento medio* al que llamaremos ***T*** y que se determina como:

$T = \frac{1}{\delta} \ln \frac{C}{V_0}$, donde:

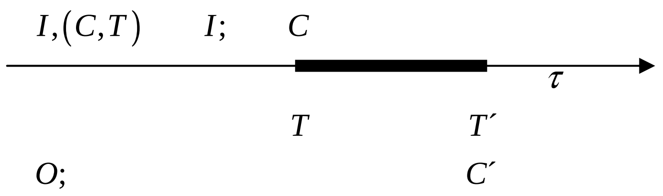
$\{(C_r, T_r) \sim (C, T)\}$ y $\{(C'_s, T'_s) \sim (C', T')\}$, respectivamente *input* y *output* y

$V_0 = \sum_{r=1}^{n} C_r e^{-\delta T}$ que representa el valor actual del conjunto financiero, es decir responde a la formulación general de la Teoría Matemática del Interés, donde en un régimen de capitalización a interés compuesto se dan las siguientes equivalencias de tasas:

---
[2] La diferencia radica en que la *duration* original trabajaba con las cuantías de los diferimientos, no con los valores actuales.

$(1+i)=(1+i_m)^m=\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^m=e^{\delta}$, siendo: $\boxed{i}$ una tasa efectiva del período (por ejemplo el año), $\boxed{i_m}$ una tasa equivalente al período que indica la frecuencia de capitalización (por ejemplo la tasa equivalente con capitalización mensual, si m fuera 12), también se la puede identificar como efectiva del período de capitalización, $\boxed{j_m}$ una tasa nominal que representa el período y la frecuencia de capitalización (para la misma frecuencia anterior, estaría representando una tasa nominal anual con capitalización mensual) y finalmente $\boxed{\delta}$ que es un caso particular de una nominal, indicando que el período de capitalización es continuo, por lo tanto la frecuencia de capitalización tiende a infinito ($\lim_{m\to\infty} j_m \to \delta$).

Convirtiéndose es esta manera en una *OFI simple equivalente*, como muestra el siguiente eje temporal*:*



El **plazo financiero medio** (*PFM*) está definido por la siguiente expresión:

$$t=T'-T=\frac{1}{\delta}\ln\frac{C'}{V'_0}-\frac{1}{\delta}\ln\frac{C}{V_0}=\frac{1}{\delta}\left(\ln\frac{C'/V'_0}{C/V_0}\right)=\frac{1}{\delta}\ln\left(\frac{C'}{V'_0}\frac{V_0}{C}\right)=\frac{1}{\delta}\left(\ln\frac{C'}{C}-\ln\frac{V'_0}{V_0}\right)\Rightarrow$$

$$\boxed{t=\frac{1}{\delta}\left(k-\ln\frac{V'_0}{V_0}\right)}$$

Con las siguientes propiedades, entre otras:

1. Dominio en todo el campo real, excepto cuando $\delta=0$
2. Continuidad en $\delta=0$, por discontinuidad evitable en: $\beta=\frac{\sum C'_sT'_s}{C'}-\frac{\sum C_rT_r}{C}$
3. Acotada para: $a<t(\delta)<b$ donde: $a=T_1'-T_n$ y $b=T_m'-T_1$
4. Intersecciones con el eje de ordenadas en el punto $(0,\beta)$ y con el eje de abscisas para las soluciones de $\Gamma(\delta)=k$

5. Tiene sólo asíntotas horizontales en los valores de la función definidos por: $t(\infty)=\lim_{\delta\to\infty} t(\delta)=T_1'-T_1=A$ y $t(-\infty)=\lim_{\delta\to-\infty} t(\delta)=T_m'-T_n=B$
6. La derivada primera es la función *duration*
7. Óptimos relativos cuando $t(\delta)=d(\delta)$

La *duration*[3], cuya expresión sería: $d(\delta)=\frac{\sum C'_r T_r' e^{T'_r}}{\sum C'_r e^{T'_r}}-\frac{\sum C_r T_r e^{T_r}}{\sum C_r e^{T_r}}$, cuyo análisis es útil para la determinación del óptimo, tiene entre otras las siguientes propiedades:

1. Dominio en todo el campo real, excepto cuando $\delta=0$
2. Continuidad en $\delta=0$, por discontinuidad evitable en: $\beta=d(0)=t(0)$
3. Acotada para: $a<t(\delta)<b$ donde: $a=T_1'-T_n$ y $b=T_m'-T_1$, coincidentes con el *PFM*
4. Intersecciones con el eje de ordenadas en el punto $(0,\beta)$ y con el eje de abscisas para los óptimos de Γ
5. Tiene asíntotas horizontales, igual que el *PFM* para los valores A y B

En la comparación de estas dos funciones es importante destacar el análisis de los valores críticos de δ, para ello debe tenerse en cuenta que:

1. los valores de δ que hacen que $t(\delta)=0$, separan a las operaciones estrictas y degeneradas, en la primera el *PFM* es positivo y representa la permanencia media de la *OFI* (una inmovilización efectiva), mientras que en la segunda el signo es negativo lo que significa que no existe inmovilización de fondos sino liquidez
2. los valores de δ que hacen que $d(\delta)=0$ determinan tasas de inmunización
3. los valores de δ que hacen que $V_0'(\delta)=V_0(\delta)$, es decir que igualan los valores actuales establecen las conocidas *TIRs*

Otras funciones interesantes de analizar son:

- la **hipérbola**, *HIP* calculada como: $H(\delta)=\frac{k}{\delta}$ y

[3] Diferencia entre input y output, utilizando la duration de Macaulay.

• la **desviación**, *DES* calculada como:

$$\Delta(\delta) = t(\delta) - H(\delta) = \frac{1}{\delta}\left(k - \ln\frac{V_0'}{V_0}\right) - \frac{k}{\delta} = -\frac{1}{\delta}\ln\frac{V_0'}{V_0} = \frac{\Gamma}{\delta}$$

Las propiedades de ambas funciones, entre otras pueden resumirse de la siguiente manera:

1. Dominio en todo el campo real, excepto cuando $\delta = 0$
2. Acotada para: $a < t(\delta) < b$ donde: $a = T_1' - T_n$ y $b = T_m' - T_1$, coincidentes con el *PFM*
3. Intersecciones con el eje son las soluciones de las *TIRs* para la *DES*
4. Asíntotas: el eje de ordenadas en una asíntota vertical para ambas funciones, aunque de dirección invertida; la función *DES* tiene las mismas asíntotas horizontales que las funciones *PFM* y *DUR*, para los valores A por la derecha y B por la izquierda

5. Rendimiento absoluto: bruto y neto

El desequilibrio que toda *OFI* incluye consiste en determinar la cuantía que debe agregarse a uno de los miembros de la operación para restablecer el equilibrio financiero, es decir:

$(C,T) \nsim (C',T') \rightarrow (C,T) \cup (\hat{R},T') \sim (C',T')$, donde $\hat{R}$ es el rendimiento neto de T'.

Siendo I, el interés o costo financiero de la inmovilización [***C,t***] y C'' el monto en un ambiente estacionario a una tasa δ^0, tenemos:

$$C'' = Ce^{\delta^0 t} \rightarrow I = C'' - C \quad \text{y} \quad e^{\delta^0 t} = \frac{C''}{C} \rightarrow \delta^o t = \ln\frac{C''}{C}$$

$$(C,T) \sim (C'',T')$$

$$(C'',T') \cup (\hat{R},T') \sim (C',T')$$

$$\hat{R} = C' - C'' = C' - (C + I) = C' - C - I = \overline{R} - I \Rightarrow \boxed{\overline{R} = \hat{R} + I}$$

donde $\overline{R}$ representa el rendimiento bruto, que es un concepto diferente de las cuantías del *input* y *output.*

El valor actual del rendimiento neto entonces sería:

$$\widehat{R}_0 = \widehat{R}e^{-\delta^0 T'} = \left(C' - C''\right)e^{-\delta^0 T'} = C'e^{-\delta^0 T'} - C''e^{-\delta^0 T'} =$$

$$V'_0 - Ce^{\delta^0 t}e^{-\delta^0 T'} = V'_0 - Ce^{\delta^0 (t-T')} = V'_0 - Ce^{-\delta^0 T} = V'_0 - V_0 = \sum_{s=1}^{m} C_s e^{-\delta^0 T'} - \sum_{r=1}^{e^{-\delta^0 T'}} C_r e^{-\delta^0 T}$$

6. Rendimiento relativo

La reducción financiera de la operación mediante la determinación de la inmovilización financiera media equivalente permite obtener una magnitud relativa, de esta forma se separa del equilibrio de mercado o del equilibrio interno (*TIR*).

La **tasa financiera de rendimiento** relativo o de "rentabilidad" (*TFR*), será simbolizada con: $\overline{\delta}$ y surge de:

$Ce^{\overline{\delta}t} = C' \rightarrow \dfrac{C}{C'} = e^{\overline{\delta}t} \rightarrow \ln\dfrac{C}{C'} = \overline{\delta}t \rightarrow k = \overline{\delta}t \rightarrow \boxed{\overline{\delta} = \dfrac{k}{t}}$, siendo la tasa de rendimiento relativo bruto,

donde: $\overline{\delta} \cdot t = k \rightarrow TFR \cdot PFM = \text{constante}$, es decir el producto entre la *tasa financiera de rentabilidad* y el *plazo financiero medio* es una constante.

Si se toman *input* y *output* aparece la determinación de la tasa de rendimiento relativo neto, simbolizada con la $\hat{\delta}$ y su determinación sería:

$$C'' = C'e^{\hat{\delta}t}$$

$$\hat{\delta} = \frac{1}{t}\ln\frac{C'}{C''} = \frac{1}{t}\left(\ln C' - \ln C''\right) = \frac{1}{t}\left(\ln\frac{C'}{C} - \ln\frac{C''}{C}\right) = \frac{1}{t}\ln\frac{C'}{C} - \frac{1}{t}\ln\frac{C''}{C} \rightarrow \boxed{\hat{\delta} = \overline{\delta} - \delta^0}$$

y $\overline{\delta} = \hat{\delta} + \delta^0$, donde $\overline{\delta}$ expresa en rendimiento relativo endógeno y δ^0 el rendimiento exógeno del mercado.

Si $t = t_{(\delta^0)}$, entonces: $\delta^0 t_{(\delta^0)} = k$ y $V'_0 = V_0 \rightarrow t_{(\delta^0)} = \dfrac{1}{\delta^0}\left[k - \ln\dfrac{V'_0}{V_0}\right]$.

Cuando $\overline{\delta} = \delta^0 \Rightarrow$ el análisis coincide con la *TIR,* es decir cuando el rendimiento neto, $\hat{\delta}$, es nulo, esto significa que no puede compararse con la tasa de mercado porque son iguales, perdiendo el uso que tiene la *TIR.*

Tanto $\overline{\delta}$ como $\hat{\delta}$ son tasas nominales, es decir explican rendimientos por unidad monetaria y por unidad temporal, mientras que las efectivas sólo expresan rendimiento por unidad monetaria, estando referidas al plazo total de la operación.

7. Conclusiones del modelo

1. En una *OFI*, la inmovilización financiera es una magnitud compleja [***C,t***].
2. La relación entre la inmovilización y el rendimiento muestra la productividad, expresada en tasas de rendimiento relativo, $\overline{\delta}$ y $\hat{\delta}$ (bruta y neta respectivamente).
3. Rentabilidad financiera se distingue de productividad por reflejar la relación entre ese rendimiento y el costo del medio empleado, por eso la primera es un concepto <u>económico-físico</u>, rendimiento por unidad empleada o invertida, mientras que el segundo es <u>económico-financiero</u>, rendimiento por costo de unidad empleada o invertida.

En el análisis tradicional se establece como δ^0 a la tasa de interés del mercado y en resumen puede establecerse las siguientes características:

El costo de la inmovilización es el INTERÉS	$I = C\left(e^{\delta^0 t} - 1\right)$
El rendimiento bruto	$\overline{R} = C' - C = Ce^{\delta t} - C = C\left(e^{\delta t} - 1\right)$
El rendimiento neto	$\hat{R} = \overline{R} - I = C\left(e^{\delta t} - 1\right) - C\left(e^{\delta^0 t} - 1\right) = C\left(e^{\delta t} - e^{\delta^0 t}\right)$
La tasa de rentabilidad bruta	$\overline{r} = \frac{\overline{R}}{I} = \frac{\cancel{C}\left(e^{\delta t} - 1\right)}{\cancel{C}\left(e^{\delta^0 t} - 1\right)} = \frac{e^{\delta t} - 1}{e^{\delta^0 t} - 1}$ $\downarrow$ $\boxed{\overline{r} = \hat{r} + 1}$

La tasa de rentabilidad neta	$\hat{r} = \frac{\hat{R}}{I} = \frac{C\left(e^{\delta t}-1\right)-C\left(e^{\delta^0 t}-1\right)}{C\left(e^{\delta^0 t}-1\right)} =$ $\frac{\cancel{C}\left(\left(e^{\delta t}-1\right)-\left(e^{\delta^0 t}-1\right)\right)}{\cancel{C}\left(e^{\delta^0}-1\right)} = \frac{e^{\delta t}-e^{\delta^0 t}}{e^{\delta t}-1}$ $\downarrow$ $\boxed{\hat{r} = \bar{r} - 1}$

Tabla 1 - Resumen de magnitudes para una determinada tasa de mercado (elaboración propia)

Ambas tasas son "efectivas" para el plazo de la operación, son invariantes a los cambios de las unidades de medida, tanto monetaria como temporal.

8. Inmunización financiera

En este análisis se acepta la *volatilidad* del tipo de interés como una variable analítica sin restricción alguna, tomándose a la *tasa instantánea* para expresar dicha dispersión del precio de la financiación, sabiendo que una ley financiera del régimen de capitalización a interés compuesto depende tanto del tipo de interés como del período de capitalización, en este caso el concepto de continuo no debe entenderse como capitalización específico sino como *continuidad del servicio financiero durante el plazo*, es decir un devengamiento continuo de su precio.

En simbología:

$$\left(1+i_{plazo=n}\right) = e^{\delta n} \Rightarrow \ln\left(1+i_{plazo=n}\right) = \delta n \Rightarrow \delta = \frac{1}{n}\ln\left(1+i_{plazo=n}\right)$$

Cualquiera de las magnitudes descriptivas de una *OFI* tiene un valor inmunizado de la *volatilidad* si es considerado un *óptimo absoluto* de la función del tipo de interés de mercado.

La *volatilidad* afecta únicamente al *PFM,* no a la cuantía, por eso se debe analizar en los valores inmunizados, es decir en el óptimo, que está dado en el punto de incidencia entre el *PFM* y la *duration (DUR).* En símbolos donde: $d(\delta) = t(\delta)$.

Realmente existirá un óptimo relativo si $\beta \notin (A, B)$, en tal caso si $\beta > \max(A, B)$ existe un máximo definido para δ^{Max} y si $\beta < \min(A, B)$ tendremos un mínimo definido para δ^{Min}. Además: $\delta^{Max} > 0$ si $A > B$ y $\delta^{Min} > 0$ si $A < B$, siendo β el valor de continuidad de la función.

En conclusión:

1. El valor máximo inmunizado del *PFM* será para $d\left(\delta^{Max}\right) = t\left(\delta^{Max}\right)$, siendo el mínimo inmunizado la asíntota $t(\infty) = A$
2. El valor mínimo inmunizado del *PFM* será para $d\left(\delta^{Min}\right) = t\left(\delta^{Min}\right)$, siendo el máximo inmunizado la asíntota $t(\infty) = A$

En el resto de las situaciones, donde $\beta \notin (A, B)$, solamente en algunas casos se logrará un óptimo y es muy común que el *PFM* se encuentre en el intervalo (β, A), para el dominio no negativo de β.

Bajo estas condiciones de inmunización la *volatilidad* no afecta al rendimiento absoluto bruto ($\overline{R}$), solamente al **rendimiento absoluto neto** ($\widehat{R}$).

En simbología: $\widehat{R} = \overline{R} - I = C' - Ce^{\theta}$, donde: $\theta = \delta \cdot t(\delta)$, teniendo un óptimo relativo en el valor donde su derivada se anula y esto se produce para aquellos valores de tasa que anulan la *DUR,* en simbología para $d(\delta) = 0$, considerando estas δ valores inmunizados, los que pueden demostrarse analíticamente analizando las derivadas primera y segunda de la función.

Del análisis de los parámetros: β, A, B pueden inferirse las siguientes conclusiones:

1. No existirán valores inmunizados positivos cuando: $(B > 0; \beta < 0; A < 0)$ y $(B < 0; \beta > 0; A > 0)$.
2. Existirá una solución única positiva cuando: $(B > 0; \beta > 0; A < 0)$, $(B > 0; \beta < 0; A > 0)$, $(B < 0; \beta > 0; A < 0)$ y $(B < 0; \beta < 0; A > 0)$.
3. Incertidumbre para obtener una, dos o ninguna soluciones positivas cuando: $(B > 0; \beta > 0; A > 0)$ y $(B < 0; \beta < 0; A < 0)$.

El **valor actual del rendimiento absoluto neto** *VAN* se puede expresar como: $\widehat{R}_0 = \widehat{R}e^{\delta T} = V_0{}' - V_0$, siendo este valor cuasi-inmunizado cuando el residuo es cercano a cero.

Tasa efectiva de rendimiento neto, denominada como $\Gamma(\delta) = k - \theta(\delta)$ y tendrá un valor inmunizado mínimo cuando $\beta > 0$, mientras que será un máximo cuando sea negativo y representaría una operación degenerada. Este análisis se sustenta en el estudio de los resultados de las derivadas primera y segunda de la función.

La representación gráfica de una *OFI* estricta, de manera genérica sería el siguiente:

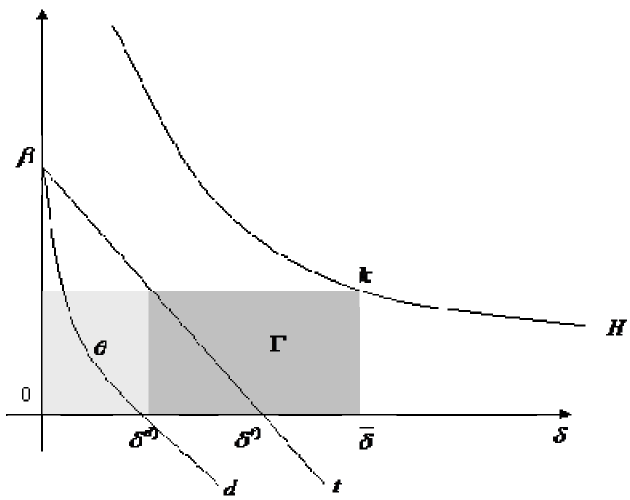


Ilustración 1 - Gráfico de una *OFI* estricta (elaboración propia)

Tasas de rentabilidad bruta y neta (*TRB* y *TRN*), donde los valores inmunizados serán: $\bar{r} = \frac{\bar{R}}{I} \rightarrow \bar{r} = \frac{e^{k}-1}{e^{\theta}-1}$ y por supuesto $\hat{r} = \bar{r} - 1$, ambos valores inmunizados.

El análisis de las derivadas de estas funciones nos arrojan las siguientes conclusiones:

- Si $k > 0$ y $\beta > 0$ los valores inmunizados son mínimos
- Cuando $k < 0$ y $\beta > 0$ dichos valores son máximos
- Generalizando los valores serán mínimos cuando $k \cdot \beta > 0$ y máximos para $k \cdot \beta < 0$

Tasas nominales de rendimiento bruto y neto (*TFR* y *TFRN*), definida la primera de ellas como: $\bar{\delta} = \frac{k}{t\left(\delta^{óptimo}\right)}$.

Mientras que la segunda cumple con la condición: $\hat{\delta} = \bar{\delta} - \delta^{\bullet}$, donde $\delta^{\bullet}$ representa una tasa de mercado que se determina considerando que es la que tiene en el *PFM* la misma pendiente que para la función *HIP* en la tasa $\bar{\delta}$, es decir donde las derivadas primeras de ambas funciones se iguala ($t'_{(\delta)} = H'_{(\delta)}$), gráficamente sería:

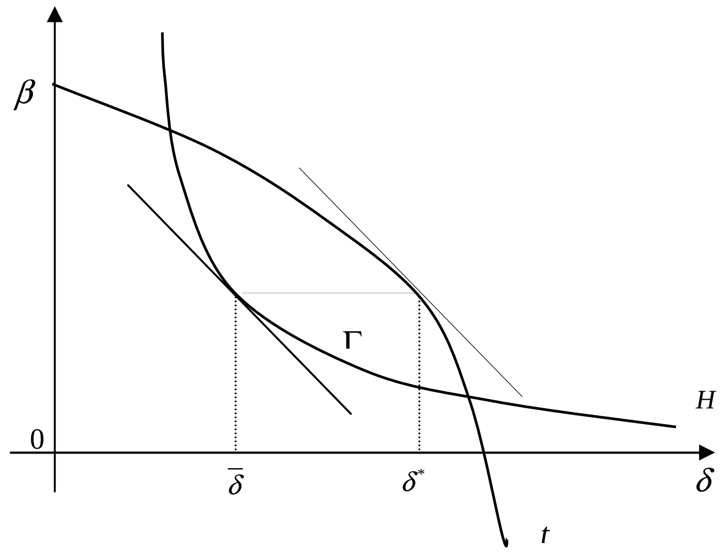


Ilustración 2 - Gráfico de definición de la tasa de mercado para determinar la *TFRN* (elaboración propia)

La *TFR* tiene su coincidencia con máximos y mínimos con lo dicho para el análisis del *PFM,* considerando que el valor k es una constante.

9. Conclusiones para el concepto de Inmunización financiera

1. las condiciones de inmunización financiera para las características $\widehat{R}$, Γ, $\bar{r}$ y $\hat{r}$ de cualquier *OFI* se dan para los valores de δ que anulan la *duration*
2. en cambio para las $\bar{\delta}$ y $\hat{\delta}$ se establecen otros requerimientos, por ejemplo la *TIR* de mercado δ^*, siempre que la adquisición de los activos financieros se haya realizado en dicho mercado
3. lo más común es que se obtenga una *OFI* que tenga un plazo de rendimiento total positivo, es decir $k > 0$ o que la cuantía agregada de los egresos supere a la de los ingresos, en símbolos $C' > C$
4. la expresión $\bar{\delta} \cdot t_{(\delta)} = k$, otorga las soluciones positivas, con un número limitado a 0-1-2, donde una *OFI* se comporta como una *OFF*, es decir donde existe equilibrio financiero y la convierte en viable para desarrollarse en el mercado

Finalmente se expondrá cuándo se establecen diferentes soluciones para las tasas de mercado:

Una sola *TIR* positiva (δ^*), se da en dos casos diferenciados:

Caso A: cuando la unión del *PFM* y la *HIP* se da en un solo punto y se produce en los casos donde $A > 0$. En estos casos además se obtiene:

1. Si $\beta < 0$, se obtiene una tasa de inmunización ($\delta^{d)}$) donde $d_{(\delta)} = 0$ y en consecuencia se pueden obtener valores inmunizados para: $\widehat{R}(\delta^{d)})$, $\Gamma_{(\delta^{d)})}$, $\bar{r}(\delta^{d)})$ y $\hat{r}(\delta^{d)})$. En cambio si $\beta > 0$, la inmunización es poco probable, de suceder, nos encontraríamos con dos valores donde la *DUR* es cero, donde una operación sería estricta y la otra degenerada.

2. Si en $t_{(\delta)} = d_{(\delta)}$, se encuentran tasas máxima ($\delta^s > 0$) o mínima ($\delta^t > 0$), se obtendrán valores inmunizados como rendimientos máximos o mínimos respectivamente ($\overline{\delta}_{(\delta^s)}$ y $\overline{\delta}_{(\delta^t)}$).
3. No existe la solución $\delta^\bullet > 0$ para $t'_{(\delta)} = H'_{(\delta)}$, es decir no hay un óptimo para $\hat{\delta}_{(\delta^\bullet)}$
4. Ninguna de las tasas coincide con la *TIR* del mercado, por lo tanto la operación no es accesible en el mismo

<u>Caso B</u>: cuando δ^* es un punto de tangencia entre *PFM* e *HIP* y se da la condición que $A < 0$. En estos casos además se obtiene:

1. $\delta^* = \overline{\delta} = \delta^{d)} = \delta^\bullet$, los valores inmunizados: $\hat{R}_{(\delta^*)} = 0$, $\Gamma_{(\delta^*)} = 0$, $\overline{r}_{(\delta^*)} = 1$, $\hat{r}_{(\delta^*)} = 0$ y $\hat{\delta}_{(\delta^*)} = 0$, además es accesible en el mercado porque es igual a su *TIR*
2. No hay soluciones posibles para $t_{(\delta)} = d_{(\delta)}$, por lo tanto no hay valor inmunizado para $\overline{\delta}$

Dos *TIRs* positivas, supone dos puntos de intersección entre las funciones *PFM* e *HIP* y exige la condición que $A < 0$, se tiene:

1. Si $\beta > 0$, existe una solución $\delta^{d)} > 0$ para $d_{(\delta)} = 0$, tal que se encuentra entre dos valores de tasas de mercado donde las funciones *PFM* e *HIP* se igualan, de tal forma que $\delta_1^* = \delta^{d)} = \delta_2^*$. Se encuentran inmunizados dos valores: $\hat{R}_{(\delta^{d)})} < 0$, $\Gamma_{(\delta^{d)})} < 0$, $\overline{r}_{(\delta^{d)})} < 1$ y $\hat{r}_{(\delta^{d)})} < 0$. Si hay solución $\delta^s > 0$, para $t_{(\delta)} = d_{(\delta)}$, entonces hay valor inmunizado para $\overline{\delta}_{(\delta^s)}$
2. Si $\beta < 0$, existen dos soluciones positivas para $d_{(\delta)} = 0$, para una operación estricta y degenerada y se dan valores inmunizados para cada tasa en: $\hat{R}_{(\delta^{d)})}$, $\Gamma_{(\delta^{d)})}$, $\overline{r}_{(\delta^{d)})}$ y $\hat{r}_{(\delta^{d)})}$. Siempre hay solución $\delta^s > 0$, con su valor inmunizado para $\overline{\delta}_{(\delta^s)}$
3. Siempre existe la solución $\delta^\bullet > 0$ para $t'_{(\delta)} = H'_{(\delta)}$, es decir hay valor inmunizado para $\hat{\delta}_{(\delta^\bullet)}$

4. Ningún valor inmunizado coincide con las *TIRs*, por lo tanto la operación no es accesible en el origen de una *OFI*, si ese origen se produjo en el mercado como una *OFF*

No existe *TIR* positiva, supone la inexistencia de puntos de intersección entre las funciones *PFM* e *HIP* y exige la condición que $A<0$, se tiene:

1. Si $\beta>0$, existe una solución $\delta^{d)}>0$ para $d_{(\delta)}=0$, se encuentran inmunizados dos valores: $\widehat{R}\left(\delta^{d)}\right)>0$, $\Gamma_{\left(\delta^{d)}\right)}>0$, $\bar{r}\left(\delta^{d)}\right)>1$ y $\hat{r}\left(\delta^{d)}\right)>0$. Si existe la solución $\delta^{s}>0$, para $t_{(\delta)}=d_{(\delta)}$, también hay valor inmunizado para $\bar{\delta}\left(\delta^{s}\right)$
2. Si $\beta<0$, existen dos soluciones positivas para $d_{(\delta)}=0$, para una operación estricta o degenerada, respectivamente, con valores inmunizados para cada tasa en: $\widehat{R}\left(\delta^{d)}\right)$, $\Gamma_{\left(\delta^{d)}\right)}$, $\bar{r}\left(\delta^{d)}\right)$ y $\hat{r}\left(\delta^{d)}\right)$. Siempre hay solución $\delta^{s}>0$, con su valor inmunizado para $\bar{\delta}\left(\delta^{s}\right)$
3. Siempre existe la solución $\delta^{\bullet}>0$ para $t'_{(\delta)}=H'_{(\delta)}$, es decir hay valor inmunizado para $\hat{\delta}\left(\delta^{\bullet}\right)$
4. No existiendo *TIR*, la *OFI* no se generó en un mercado financiero por lo tanto los valores inmunizados no se originan en una *OFF*

Todo esto se puede sintetizar en los siguientes cuadros (Rodríguez (2), 1994:29):

Parámetros			Soluciones					
B	β	A	$\delta^{t)}>0$ $\delta^{d)}>0$	$\delta^{t)}<0$ $\delta^{d)}<0$	TOTAL	$\delta^{*}>0$	$\delta^{*}<0$	TOTAL
>0	>0	>0	0-1-2	0	0-1-2	1	0	1
		<0	1	0	1	0-1-2	0	0-1-2
	<0	>0	1	1	2	1	0-1-2	1-2-3
		<0	0	1	1	0	0-1-2	0-1-2
<0	>0	>0	0	1	1	1	1	2
		<0	1	1	2	0-1-2	1	1-2-3
	<0	>0	1	0	1	1	1	2
		<0	0-1-2	0	0-1-2	0-1-2	1	1-2-3

Tabla 2 - para $k>0$

Parámetros			Soluciones					
B	β	A	$\delta^{t)} > 0$ $\delta^{d)} > 0$	$\delta^{t)} < 0$ $\delta^{d)} < 0$	TOTAL	$\delta^* > 0$	$\delta^* < 0$	TOTAL
> 0	> 0	> 0	0-1-2	0	0-1-2	0-1-2	1	1-2-3
		< 0	1	0	1	1	1	2
	< 0	> 0	1	1	2	0-1-2	1	1-2-3
		< 0	0	1	1	1	1	2
< 0	> 0	> 0	0	1	1	0	0-1-2	0-1-2
		< 0	1	1	2	1	0-1-2	1-2-3
	< 0	> 0	1	0	1	0-1-2	0	0-1-2
		< 0	0-1-2	0	0-1-2	1	0	1

Tabla 3 - para $k < 0$

EVALUACIÓN DE PROYECTOS DE INVERSIÓN

Este apartado resume la bibliografía analizada, cuyo desarrollo se encuentra agregado en el Anexo titulado: "*CONCEPTOS RELACIONADOS A LA VALUACIÓN DE UN PROYECTO DE INVERSIÓN",* que muestra el estudio previo pertinente realizado por esta tesista.

1. Introducción a la evaluación de proyectos de inversión

El primer interrogante al tema que nos ocupa sería: **¿Qué es un proyecto?**

Descrito en forma general, un proyecto es la búsqueda de una solución inteligente al planteamiento de un problema tendiente a resolver, entre muchas, una necesidad humana. De esta forma, puede haber diferentes ideas, inversiones de diverso monto, tecnología y metodologías con distinto enfoque, pero todas ellas destinadas a resolver las necesidades del ser humano en todas sus facetas, como pueden ser: educación, alimentación, salud, ambiente, cultura, etc.

Particularmente, el **"proyecto de inversión"** se puede describir como un plan que, si se le asigna determinado monto de capital y se le proporcionan insumos de varios tipos, podrá producir un bien o un servicio, útil al ser humano o a la sociedad en general.

La evaluación de un proyecto de inversión, cualquiera que este sea, tiene por objeto conocer su rentabilidad económica y social, de tal manera que asegure resolver una necesidad humana en forma eficiente, segura y rentable. Sólo así es posible asignar los escasos recursos económicos a la mejor alternativa.

Para tomar una decisión sobre un proyecto, es necesario que sea sometido al análisis multidisciplinario de diferentes especialistas. Aunque no se puede hablar de una metodología rígida que guíe la toma de decisiones sobre un proyecto, fundamentalmente debido a la gran diversidad de proyectos y a sus diferentes aplicaciones, sí es posible afirmar categóricamente que una decisión siempre debe estar basada en el análisis de un sinnúmero de antecedentes con la aplicación de una metodología lógica que abarque la consideración de todos los factores que participan y afectan al proyecto.

La estructura general de la metodología de la evaluación de proyectos puede ser representada por el siguiente diagrama:

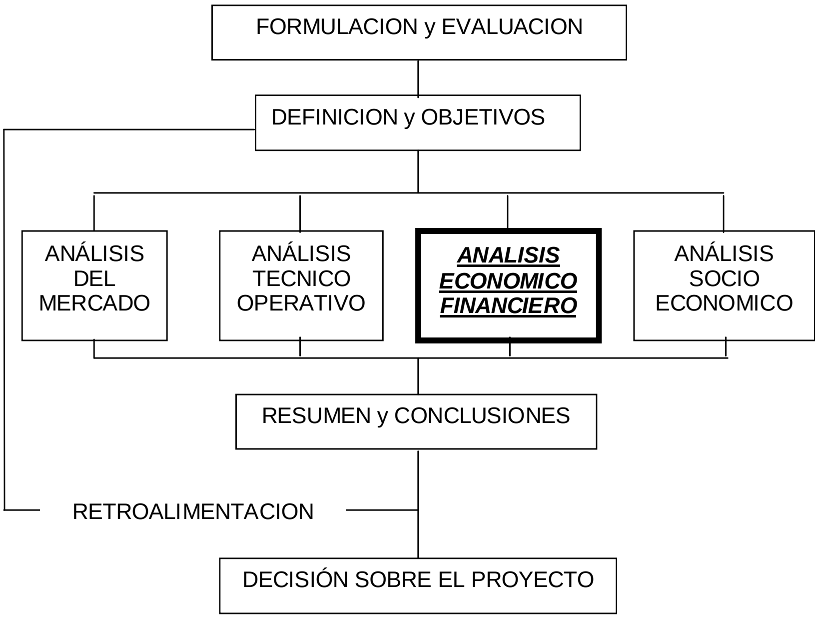


Ilustración 3 - Metodología para evaluar proyectos (elaboración GIMB)

2. Análisis económico del proyecto

Concepto de inversión: es uno de los conceptos económicos más difícil de delimitar. Son muchos los autores que utilizan el vocablo "inversión" con diferente sentido y amplitud, existiendo incluso algunos que utilizan dicha palabra con diferentes acepciones en las distintas partes de una misma obra.

Siguiendo a Pierre Massé: "La definición más general que se puede dar del acto de invertir, es que, mediante el mismo, tiene lugar el cambio de una satisfacción inmediata y cierta a la que se renuncia, contra una esperanza que se adquiere y de la cual el bien invertido es el soporte" (Massé, 1959).

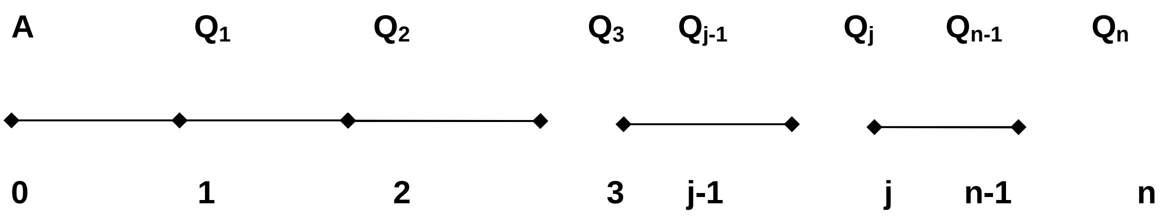
Por lo tanto, en todo acto de invertir **intervienen** los siguientes elementos:

1. Un sujeto que invierte, ya sea persona física o jurídica.
2. Un objeto que se invierte y que puede ser de naturaleza muy diversa.
3. El costo que supone la renuncia a una satisfacción en el presente.
4. La esperanza de una recompensa en el futuro.

La dimensión financiera de la inversión, significa que toda inversión se puede definir por la corriente de ingresos y pagos que origina. Este aspecto financiero de la inversión ha sido subrayado por un autor pionero del tema hace ya más de cincuenta años (Schneider, 1956). Así, si suponemos para mayor simplicidad períodos de tiempo anuales, y llamamos:

A: inversión inicial.
Q_j: Flujo neto de fondos.
n: cantidad de períodos que abarca el proyecto.

La inversión vendrá definida por el siguiente diagrama temporal de flujos de caja o **cash-flow**:



3. Criterios de selección de inversiones tradicionales

A continuación se presentan los dos criterios tradicionales de valuación de proyectos de inversión:

3.1. Valor actual neto, *VAN*, consisten en:

- predecir los flujos netos del proyecto;

- estimar una tasa de descuento que refleje el costo de oportunidad, es decir, la tasa de rendimiento esperada por la empresa y dejada de lado por invertir en el proyecto;
- determinar, en función de los dos anteriores, el valor actual de esos flujos;
- establecer si estos flujos actualizados son mayores que la inversión inicial. En tal caso se aceptarán, como primer medida, aquellos proyectos con *VAN* positivo.

El principal inconveniente para este método, es que su buen resultado depende de que la determinación de flujos y la tasa sean representativas de la realidad, para mejorar esto se han presentado varios trabajos con incorporación de la lógica borrosa en su determinación, favoreciendo el sinceramiento de la información que el decididor recibe.

Otra cuestión es la decisión de elección entre varios proyectos con *VAN* positivo, en cuyo caso, por regla general, deberá elegirse aquel que posea el *VAN* mayor. En situación de certeza no hay problemas con esta determinación; tampoco en situación de riesgo, donde las herramientas desarrolladas basadas en la Estadística arrojan buenos resultados. La pregunta que nos ocupa es *¿qué sucede cuando nos enfrentamos a un estado de incertidumbre?*, que no necesariamente implica falta de información, sino negación de certeza, también la incorporación de la lógica multivaluada ha solucionado satisfactoriamente este cuestionamiento.

3.2. Tasa interna de retorno o rentabilidad, *TIR*

Representa la decisión de invertir en aquellos proyectos cuya tasa de rentabilidad sea mayor al costo de oportunidad antes mencionado y se define como el tipo de descuento del proyecto que hace el *VAN* igual a cero.

No debe confundirse esta tasa con el costo de oportunidad, ya que mide la rentabilidad del proyecto, es una tasa de rentabilidad interna, ya que dependen de los flujos determinados por el propio proyecto.

Las dificultades de este método pueden resumirse de la siguiente manera:

- Es diferente el criterio si se considera la inversión préstamo o endeudamiento.

- El problema de la Tasa de rentabilidad múltiple. Cuando los flujos tienen cambios de signo, de positivos a negativos, encontramos más de una solución a la ecuación planteada.
- Proyectos mutuamente excluyentes. Es decir, cuando no pueden desarrollarse dos proyectos deberá seleccionarse el que añada mayor riqueza a la empresa y esto no suele reflejarse en el proyecto de mayor *TIR.* La solución a este inconveniente podría estar en determinar la *TIR* de los flujos incrementales.

Finalmente, cuando tenemos proyectos que además de ser mutuamente excluyentes tienen diferente horizonte temporal, el criterio de la *TIR* suele favorecer los proyectos más cortos sin ser los mejores.

INTRODUCCIÓN A LA BORROSIDAD

Debe entenderse a la lógica difusa como un sobreconjunto de la lógica (boleana) convencional que se ha ampliado, con respecto al concepto de la verdad parcial, definida para los valores de verdad entre "totalmente verdadero" y "totalmente falso".

La Lógica Fuzzy o Difusa, es una lógica basada en la teoría de conjuntos que posibilita imitar el comportamiento de la lógica humana y el término "difuso" procede de la palabra inglesa "fuzzy" que sirve para denominar la pelusa que recubre el cuerpo de los polluelos al poco de salir del huevo. Este término inglés significa "confuso, borroso, indefinido o desenfocado".

A título ejemplificativo se puede analizar cualquier variable cualitativa, por ejemplo la "edad", dentro de la misma veamos el concepto de "mediana edad", inmediatamente nuestra mente lo asocia a la imagen de ciertas personas o tipos de personas. Pero este es un concepto con límites imprecisos que no puede ser tratado matemáticamente, ni siquiera por un software, que normalmente requieren que las variables sean definidas. En esta nueva necesidad es donde se inserta la Lógica Difusa, que permite trabajar información con alto grado de imprecisión, diferenciándose de la lógica convencional que trabaja con información bien definida y precisa.

Supongamos que hemos llegado a la conclusión de que la mediana edad son los 45 años, sin embargo ¿podemos descartar a las personas de 35 o 55 años como edad mediana?, y ¿qué pasaría con los menores de 30 años y los mayores de 60 años?, tampoco se podrían considerar radicalmente como "no de mediana edad".

Bajo estas consideraciones podrían definirse tres grupos: el primero, el de los "jóvenes" que comprendería a las personas de 0 hasta los 35 años, el segundo el de aquellos de "mediana edad" va de los 30 hasta los 55 años, por último el de la "tercera edad" que abarca de los 50 años en adelante.

Se puede observar, que desde el punto de vista de los "conjuntos difusos", el período de edad entre los 30 y 35 puede considerarse tanto dentro del conjunto "joven" como en el de "mediana edad". Otro tanto ocurre con las personas entre los 50 y 55 años, que pueden incluirse dentro de los de "mediana edad" como los de "tercera edad".

Estas indefiniciones de valoración facilitan la expresión matemática de las expresiones difusas o indefinidas, siendo una de sus ventajas la posibilidad de implementar sistemas basados en ella, tanto en hardware como en software o en combinación de ambos, posibilitando la interpretación de expresiones humanas, por medio de una serie de reglas de "sentido común", que normalmente son imprecisas para la matemática tradicional.

1. Incorporación de la matemática borrosa

1.1. Números borrosos triangulares *NBTs*

Un *NBT* puede definirse como aquel subconjunto borroso que se halla formado por una secuencia finita o infinita de intervalos de confianza, que surgen de asignar un nivel de confianza α a los valores de un conjunto referencial dado, el que define su grado de pertenencia; medido a través de sus funciones características de pertenencia ($\mu_{(x)}$) lineales.

El *NBT* puede expresarse como un número impreciso: $\underset{\sim}{A} = (a_1, a_2, a_3)$ siendo $a_1 \leq a_2 \leq a_3$, lo que implica simplicidad en el cálculo tanto de los números borrosos en sí como de las operaciones entre ellos. Posee tres valores críticos:

- un valor central cuyo nivel de confianza α es igual a 1, generalmente este valor proviene de un estudio técnico exhaustivo de la variable analizada;
- dos valores extremos cuyos niveles de confianza α son iguales a 0, el estudio nos permite definir que la variable no tomará valores más allá de dichos extremos.

Supongamos lo siguiente: si A_0 es una unidad presupuestaria cuyo *NBT* es igual a (120,160,210), el valor de 160 unidades monetarias, proviene del estudio técnico realizado y por lo tanto su nivel de confianza es igual a uno, y además sabemos que el valor que adoptará la unidad presupuestaria no se ubicará fuera de los extremos 120 y 210, cuyos niveles de confianza son iguales a cero.

También se lo expresa a través de sus funciones características de pertenencia, es decir, como un número borroso en el que sus límites $\forall 0 \leq \alpha \leq 1$ están representados por $\mu_{(x)}$ lineales, y cuando $\alpha = 1$, dichas funciones se interceptan.

Gráficamente, para facilitar la comprensión de la herramienta utilizada:

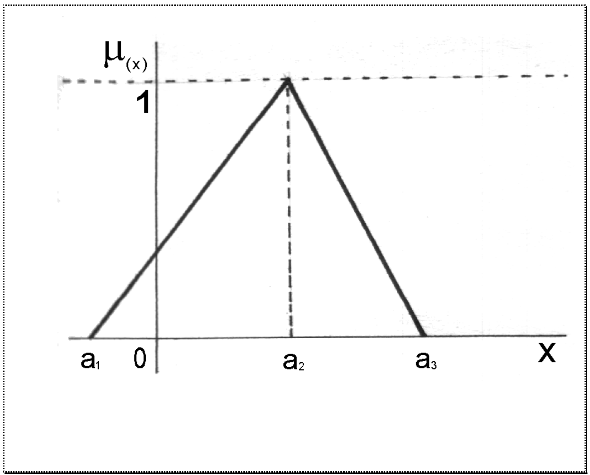


Ilustración 4 - Número borroso triangular *NBT* (elaboración GIMB)

Donde:

$\mu_{(x)}$: es la función característica de pertenencia,

α: es el nivel de confianza de los valores x

x: valores correspondientes al conjunto referencial dado, que en nuestro ejemplo son unidades monetarias.

Y podemos definir sus funciones características de pertenencia de la siguiente manera:

$\forall$ x $\in$ R

$\mu_{\underset{\sim}{A}}(x) = 0$ si $x \leq a_1$

$\mu_{\underset{\sim}{A}}(x) = \dfrac{x - a_1}{a_2 - a_1}$ si $a_1 \leq x \leq a_2$ siendo la función a la izquierda del valor central del número borroso

$\mu_{\underset{\sim}{A}}(x) = \dfrac{-x + a_3}{a_3 - a_2}$ si $a_2 \leq x \leq a_3$ siendo la función a la derecha del valor central del número borroso

$\mu_{\underset{\sim}{A}}(x) = 0$ si $x \geq a_3$

Por ejemplo, el *NBT* $A_\alpha = (-4,1,4)$ puede representarse de la siguiente manera:

$\mu_{\underset{\sim}{A}}(x) = 0$ si $x \leq -4$

$\mu_{\underset{\sim}{A}}(x) = \dfrac{x+4}{5}$ si $-4 \leq x \leq 1$

$\mu_{\underset{\sim}{A}}(x) = \dfrac{-x+4}{3}$ si $1 \leq x \leq 4$

$\mu_{\underset{\sim}{A}}(x) = 0$ si $x \geq 4$

1.2. Las operaciones básicas y generales con *NBTs* se realizan de la siguiente manera:

1. para sumar dos *NBTs* simplemente se suman los valores mínimos, más posibles y máximos para obtener el valor mínimo, más posible y máximo del *NBT* resultante. Por ejemplo: si $A_\alpha = (8,10,13)$ y $B_\alpha = (2,5,9)$, será $A_\alpha + B_\alpha = (10,15,22)$.
2. para restar dos *NBTs*, generalmente se resta del valor mínimo del primer *NBT* el máximo del segundo, obteniéndose el mínimo del resultante; el de mayor confianza se obtiene restándole al primer valor central el segundo; y el máximo del *NBT* resultante se obtendrá de restar el mínimo del segundo del máximo del primero. Por ejemplo: $A_\alpha - B_\alpha = (-1,15,11)$.
3. para la multiplicación de *NBTs* deberán multiplicarse el mínimo del primero por el mínimo y el máximo del segundo y el máximo del primero por el mínimo y el máximo del segundo, siendo el menor de los cuatro resultados obtenidos el mínimo del *NBT* resultante y el máximo de aquellos cuatro valores el máximo del nuevo *NBT*. El valor central se obtendrá multiplicando los valores centrales de los factores. Por ejemplo: $A_\alpha(\cdot)B_\alpha = (16,50,117)$.

4. para la división de *NBTs* se procederá de manera análoga a la multiplicación, pero el divisor será el inverso del segundo *NBT*, cuyo mínimo será el inverso del máximo del segundo *NBT*, el máximo será el inverso del mínimo de dicho *NBT* y el más confiable será el inverso del más confiable de aquel *NBT*. Por ejemplo: $A_\alpha(:)B_\alpha = (0.88, 2, 6.5)$.

2. Etiquetas lingüísticas

Al trabajar con números borrosos se establece una correspondencia semántica para los diferentes grados de pertenencia que puede adoptar una variable. El número de escalas semánticas, o niveles de confianza, que se necesiten depende de cuántas graduaciones se necesiten para distinguir la posibilidad de los diferentes resultados.

Kaufmann y Gil Aluja proponen establecer *11 escalas de posibilidad:*

0 Imposible
0,1 Prácticamente imposible
0,2 Casi imposible
0,3 Difícilmente posible
0,4 Más imposible que posible
0,5 Igualmente posible que imposible
0,6 Más posible que imposible
0,7 Bastante posible
0,8 Casi seguro
0,9 Prácticamente seguro.
1 Totalmente posible

Por otra parte, el concepto de conjunto borroso juega un papel fundamental en formulación de variables cualitativas, que deben estar representadas por conceptos lingüísticos, tales como muy alto, alto, bastante alto, interpretados en un contexto particular, se denomina ***variable lingüística,*** definida mediante ***etiquetas****.*

Una variable lingüística difiere de una variable numérica en que sus valores no son números, sino que están expresados por términos lingüísticos o etiquetas lingüísticas, que representan valores aproximados de la variable considerada.

Cada término o etiqueta lingüística estará representada por medio de un número borroso incluido en el intervalo $[0,1]$, expresado por su función de pertenencia. Las valoraciones lingüísticas son estimaciones que pueden obtenerse mediante la consulta a expertos, y pueden representarse adecuadamente con números borrosos (triangulares (*NBT*), trapezoidales (*NBTr*), o Intervalos de confianza).

3. Ordenamiento de *NBTs*

Para introducir un criterio de ordenamiento a los NBTs, tan importante para establecer criterios de selección se introduce una de las herramientas utilizadas, elegida por su simplicidad, denominada "distancia de Hamming". .

Para su aclaración se introducen algunos ejemplos hipotéticos con la pretensión se seleccionar el mejor *VAN borroso* entre dos proyectos de evaluación.

Si el gráfico de los *VAN* es el siguiente:

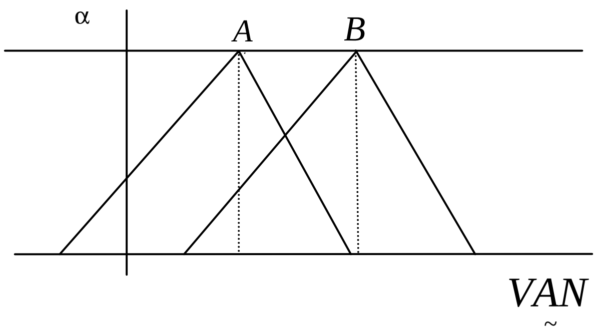


Ilustración 5 - Representación de dos *NBTs* de fácil ordenamiento (elaboración GIMB)

La decisión no admite dudas $\Rightarrow \underset{\sim}{A} \langle \underset{\sim}{B}$ porque todos sus vértices son menores, en conclusión: se elegiría el proyecto B.

Qué pasa si el resultado es el siguiente:

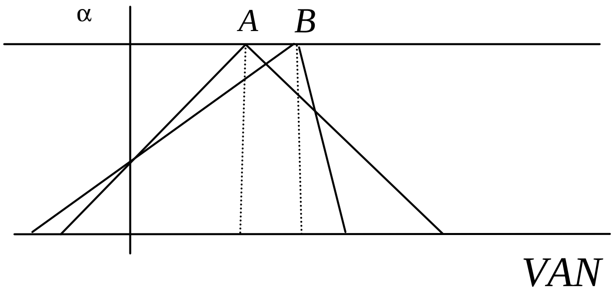


Ilustración 6 - Representación de dos *NBTs* de difícil ordenamiento (elaboración GIMB)

La decisión requiere de un análisis. Se utilizará el método de la distancia a un umbral determinado cuya condición será que sea un número real (*R*) cualquiera, mayor que los limites superiores de nuestros *NBTs* con el que se comparan, eligiéndose aquel que tenga menor distancia.

Un caso sencillo sería:

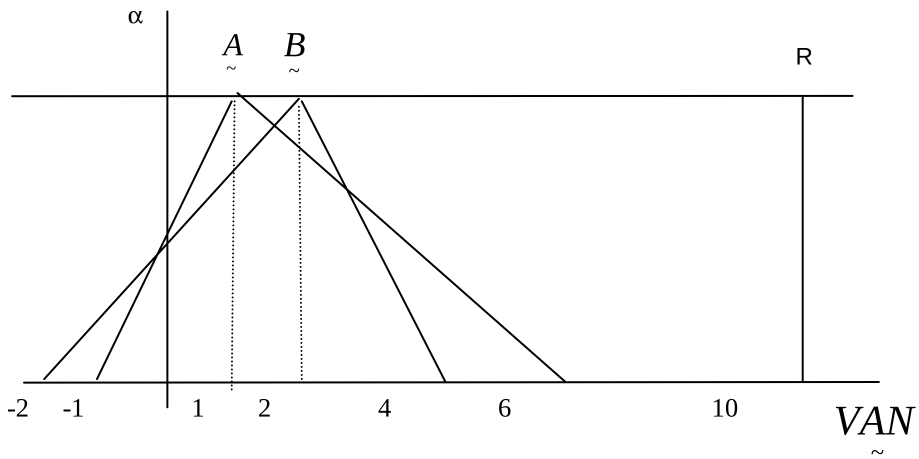


Ilustración 7 - Representación de dos *NBTs* con datos para ordenar (elaboración GIMB)

$$dI(\underset{\sim}{A},10) = \frac{11+9}{2} = 10 \qquad dD(\underset{\sim}{A},10) = \frac{4+9}{2} = 6{,}5 \qquad d(\underset{\sim}{A},10) = 16{,}5$$

$$dI(\underset{\sim}{B},10) = \frac{12+8}{2} = 10 \qquad dD(\underset{\sim}{B},10) = \frac{8+6}{2} = 7 \qquad d(\underset{\sim}{B},10) = 17$$

$$\Rightarrow \quad d(\underset{\sim}{A},10) \rangle\, d(\underset{\sim}{B},10) \quad \Rightarrow \quad \underset{\sim}{A} \rangle\, \underset{\sim}{B}$$

Realizado el cálculo se seleccionaría el proyecto A por tener una distancia menor al umbral fijado, es decir está más cercano.

4. Intervalos de confianza

Como bien se ha expresado, un *NBT* se encuentra formado por una secuencia finita o infinita de intervalos de confianza, que surgen de asignar un nivel de confianza a los distintos elementos de un conjunto referencial, que define su grado de pertenencia, se puede operar de manera más sencilla con un único intervalo para el nivel de confianza cero, es decir para el máximo de incertidumbre de la variable.

Entonces, dados dos números reales: a_1 y a_2, tal que $a_1 \leq a_2$, el intervalo de confianza cerrado sería: $A = \left\{ {}^{x}\!/_{x} \in R, \forall a_1 \leq x \leq a_2 \right\}$

Es decir la información que se posee con relación a una magnitud "X" es que su valor estaría comprendido entre a_1 y a_2, simbólicamente se representaría como: $X = [a_1, a_2]$, considerado un intervalo de confianza relativo para la magnitud considerada.

Siendo sus operaciones matemáticas similares a las consideradas para los *NBTs*, cuando se trabaja con sus valores límites (el valor más bajo que toma la variable y el valor más alto que toma la misma).

5. Borrosidad en la evaluación de proyectos de inversión

El objetivo de este apartado es aportar un informe de las soluciones que aporta la matemática borrosa a un problema de gestión, adaptando los instrumentos clásicos de la evaluación de proyectos para que resulten útiles en un contexto incierto (Mallo, et al, 1998).

Para el VAN

Por ejemplo en caso de encontrarnos en una situación de incertidumbre respecto del conocimiento de la tasa de descuento, la fórmula que permite el cálculo del *VAN*, dentro de R^+, es la siguiente: $VAN = -A + \sum_{j=1}^{n} Q_j \left[\frac{1}{(1+a_j)^j}, \frac{1}{(1+m_j)^j} \frac{1}{(1+b_j)^j} \right]$, donde la tasa de descuento está dada por un número borroso triangular, en el cual a_j representa el valor más alto del costo del dinero, b_j su valor más bajo (ambos definidos para un valor de α=0) y m_j, el valor más posible, correspondiéndole un α=1, es decir, es el valor que posee un mayor nivel de confianza para el decididor.

5.1. Análisis de cómo se procede mediante un ejemplo de aplicación considerando incertidumbre en la tasa de descuento

Para analizar la conveniencia de encarar uno de los proyectos que, a modo de ejemplo, presentamos a continuación, disponemos de la siguiente información:

- Proyecto UNO: A= $ 5.000, inversión inicial a realizarse en el momento 0.

j	Q_j	b_j	m_j	a_j
1	3.000	0,06	0,08	0,11
2	4.000	0,07	0,10	0,12
3	5.000	0,08	0,10	0,13
4	6.000	0,09	0,12	0,14
5	7.000	0,10	0,12	0,15

- Proyecto DOS: A= $ 7.000, inversión inicial a realizarse en el momento 0.

j	Q_j	b_j	m_j	a_j
1	5.000	0,06	0,08	0,11
2	5.000	0,07	0,10	0,12
3	5.000	0,08	0,10	0,13
4	5.000	0,09	0,12	0,14
5	5.000	0,10	0,12	0,15

A los fines de una exposición clara, primero se calculará el *VAN* del proyecto UNO, y luego el del proyecto DOS, para finalmente determinar cuál es el más conveniente.

Como punto de partida, se puede asociar un *NBT* a cada nivel de confianza, así la tasa de actualización queda expresada como:

$$\forall \alpha \in [0,1]$$

$$A_\alpha = \left[b_j(\alpha), a_j(\alpha) \right] = \left[b_j + \left(m_j - b_j \right) \alpha, a_j - \left(a_j - m_j \right) \alpha \right]$$

Entonces, para el Proyecto Uno se obtendrá, para los distintos "j" años, las siguientes funciones a la izquierda del valor central:

$$1 + b_1(\alpha) = 1 + b_1 + \left(m_1 - b_1 \right) \alpha = 1{,}06 + 0{,}02\alpha$$

$$1 + b_2(\alpha) = 1 + b_2 + \left(m_2 - b_2 \right) \alpha = 1{,}07 + 0{,}03\alpha$$

$$1 + b_3(\alpha) = 1 + b_3 + \left(m_3 - b_3 \right) \alpha = 1{,}08 + 0{,}02\alpha$$

$$1 + b_4(\alpha) = 1 + b_4 + \left(m_4 - b_4 \right) \alpha = 1{,}09 + 0{,}03\alpha$$

$$1 + b_5(\alpha) = 1 + b_5 + \left(m_5 - b_5 \right) \alpha = 1{,}10 + 0{,}02\alpha$$

Partiendo de estos valores, se puede calcular el producto de $\left[1 + b_j(\alpha) \right]$ para cada uno de los "j" períodos, y así obtener la tasa de descuento acumulada para cada año.

j	Desarrollo de la tasa acumulada
1	(1,06+0,02α)
2	(1,06+0,02α)(1,07+0,03α)
3	(1,06+0,02α)(1,07+0,03α)(1,08+0,02α)
4	(1,06+0,02α)(1,07+0,03α)(1,08+0,02α)(1,09+0,03α)
5	(1,06+0,02α)(1,07+0,03α)(1,08+0,02α)(1,09+0,03α)(1,10+0,02α)

Análogamente, se harán los mismos cálculos para obtener la tasa acumulada a la derecha del valor central, la tabla correspondiente al producto de la tasa de descuento será:

j	Desarrollo de la tasa acumulada
1	(1,11-0,03α)
2	(1,11-0,03α)(1,12-0,02α)
3	(1,11-0,03α)(1,12-0,02α)(1,13-0,03α)
4	(1,11-0,03α)(1,12-0,02α)(1,13-0,03α)(1,14-0,02α)
5	(1,11-0,03α)(1,12-0,02α)(1,13-0,03α)(1,14-0,02α)(1,15-0,03α)

Una vez calculadas las tasas de actualización a aplicar en cada período se está en condiciones de obtener el *VAN* del proyecto analizado, así para los distintos valores de α, obtenemos los siguientes resultados:

α	VAN
0	[12.027, 14.699]
0,20	[12.278, 14.415]
0,40	[12.535, 14.138]
0,60	[12.797, 13.866]
0,80	[13.066, 13601]
1	[13.341, 13.341]

Estos valores surgen de dividir el flujo de fondos de cada período por la tasa borrosa acumulada en dicho período para los distintos valores de α.

Si analizamos los valores de la tabla anterior, se observa que no se trata de un *NBT* pues sus funciones de pertenencia no son lineales. Pero, es posible trabajar con el *NBT* formado por los mismos valores extremos (a_1, a_3) y mismo valor central (a_2) sin perder información, siempre que la distancia promedio a la izquierda y derecha no sea significativa.

Así, los valores extremos (es decir el *VAN* para $\alpha = 0$) y el valor central (*VAN* para $\alpha = 1$) se convierten en los valores característicos del *NBT*. En el ejemplo el valor actual neto del Proyecto UNO, al que denominaremos $\underset{\sim}{U}$ es: $\underset{\sim}{U} = (12.027, 13.341, 14.699)$.

Otra forma de determinar se verá con las siguientes divisiones, calculando el valor central y los valores extremos del *NBT* aplicando: $A_\alpha (:) B_\alpha = \left[\frac{(a_2 - a_1)\alpha + a_1}{(b_2 - b_3)\alpha + b_3}, \frac{(a_2 - a_3)\alpha + a_3}{(b_2 - b_1)\alpha + b_1} \right]$, para $\alpha = 0$ y $\alpha = 1$, con lo cual se obtienen los valores característicos del *NBT* aproximado.

Aplicando los cálculos efectuados sobre las tasas al Proyecto DOS y la ecuación del *VAN* se obtienen los siguientes resultados:

α	VAN
0	[10.923, 13.356]
1	[12.131,12.131]

Por ser ambos proyectos aceptables según el criterio de evaluación utilizado, para seleccionar uno de ellos se los debe clasificar en un orden total, de modo tal de determinar el mayor de ambos números borrosos, lo cual se realiza mediante el cálculo de la distancia de Hamming.

5.2. Análisis de cómo se procede mediante un ejemplo de aplicación considerando incertidumbre en los flujos de fondos netos con tasa de descuento cierta

En caso de encontrarnos en una situación de incertidumbre únicamente respecto del conocimiento de los flujos de fondos la ecuación del VAN, dentro de R^+, es la siguiente: $VAN = -A + \sum_{j=1}^{n} \left[\frac{Qb_j}{(1+k_j)^j}, \frac{Qm_j}{(1+k_j)^j}, \frac{Qa_j}{(1+k_j)^j} \right]$, donde los flujos de fondos netos están dados por un *NBT*, en el cual Qa_j representa el valor más alto, Qb_j su valor más bajo, ambos para un valor de $\alpha = 0$ y Qm_j, el valor más posible.

Análisis mediante un ejemplo:

- Proyecto UNO: A= $ 5.000, inversión inicial a realizarse en el momento 0.

j	k_j	tasa acum.	Qb_j	Qm_j	Qa_j
1	1,08	1,08	2.500	3.000	4.000
2	1,10	1,188	3.000	4.000	4.500
3	1,10	1,3068	4.000	5.000	6.000
4	1,12	1,4636	5.500	6.000	6.500
5	1,12	1,6392	6.000	7.000	8.000

- Proyecto DOS: A= $ 7.000, inversión inicial a realizarse en el momento 0.

j	k_j	tasa acum.	Qb_j	Qm_j	Qa_j
1	1,08	1,08	4.000	5.000	6.000
2	1,10	1,188	4.100	5.000	5.900
3	1,10	1,3068	4.200	5.000	5.800
4	1,12	1,4636	4.300	5.000	5.700
5	1,12	1,6392	4.400	5.000	5.600

Con estos datos se pueden calcular los *NBT* que representan el valor actual neto de ambos proyectos:

- Proyecto UNO

j	Qb_j actualizado	Qm_j Actualizado	Qa_j actualizado
Inv. inicial	5.000	5.000	5.000
1	2.315	2.778	3.704
2	2.525	3.367	3.788
3	3.061	3.826	4.591
4	3.758	4.099	4.441
5	3.660	4.270	4.880
VAN	10.319	13.341	16.404

- Proyecto DOS

j	Qb_j actualizado	Qm_j Actualizado	Qa_j actualizado
Inv. inicial	7.000	7.000	7.000
1	3.704	4.630	5.556
2	3.451	4.209	4.966
3	3.214	3.826	4.438
4	2.938	3.416	3.894
5	2.684	3.050	3.416
VAN	8.991	12.131	15.271

Para la *TIR*

Cuando se trabaja con flujos de fondos borrosos, lo que se obtiene no es la tasa interna de rentabilidad que todos conocemos, sino una aproximación a la misma que es la llamada Pseudo-Tir.

El método de Pseudo-Tir no tiene por finalidad obtener la tasa que iguala los flujos de fondos actualizados a la inversión inicial; sino que su objetivo es determinar para qué tasa cierta, se hace mínima la distancia de Hamming entre los flujos borrosos actualizados y la inversión inicial, la que puede ser o no incierta. De lo anterior resulta necesario destacar la diferencia entre lo que se puede llamar método convencional de la *TIR* y el método de la Pseudo-Tir, expresando la segunda de la siguiente manera:

$$\int_{\alpha\alpha=0}^{1} \left| A - \sum_{j=1}^{n} \frac{Q_j}{(1+i)^j} \right| \delta\alpha \Rightarrow mínimo$$

Se observa en la ecuación que este método calcula la tasa a la que se minimiza la distancia de Hamming entre los flujos de fondos actualizados y la inversión inicial.

Es necesario destacar que la inversión inicial puede estar representada por un número borroso o por un número cierto, de acuerdo al espectro de incertidumbre que rodee el proyecto a analizar. En el caso de aplicación que se agrega se consideró a la inversión inicial como cierta o nítida, es decir que no está representada por un número borroso ya que generalmente el decididor conoce el monto de inversión inicial a realizar.

5.3. Ejemplo de aplicación del método de Pseudo Tir

Dados los flujos de fondos borrosos y las inversiones iniciales de los proyectos 1 y 2 ya utilizados en ejemplo anterior, se calculará la Pseudo-Tir para cada uno de ellos y así determinar cuál de los dos proyectos es más conveniente desde el punto de vista financiero, independientemente del análisis del *VAN* anteriormente realizado.

- Proyecto UNO: A= $ 5.000, a realizarse en el momento 0.

j	Qb_j	Qm_j	Qa_j
1	2500	3000	4000
2	3000	4000	4500
3	4000	5000	6000
4	5500	6000	6500
5	6000	7000	8000

- Proyecto DOS: A= $ 7.000, a realizarse en el momento 0.

j	Qb_j	Qm_j	Qa_j
1	4000	5000	6000
2	4100	5000	5900
3	4200	5000	5800
4	4300	5000	5700
5	4400	5000	5600

PROYECTO UNO:

Debido a que la inversión inicial es considerablemente menor respecto de los flujos obtenidos, se comenzará el análisis para una tasa de 0.70, de acuerdo a la siguiente secuencia:

1. *Actualización de los flujos de fondos para la tasa elegida.*

2. $\underset{\sim}{U} = \sum_{j=1}^{5} \frac{Qb_j, Qm_j Qa_j}{(1+0,70)^j} = (4404, 5378, 6473)$, donde $\underset{\sim}{U}$ representa el *NBT* actualizado a la tasa del 0.70

3. También se puede operar con los números borrosos triangulares mediante sus funciones características de pertenencia, en lugar de utilizar sus valores característicos, extremos y central, como en el caso desarrollado.

4. Conversión del número borroso, representado por valores característicos, a sus funciones de pertenencia.

$$\underset{\sim}{U} = (4404, 5378, 6473) = [4404 + (5378 - 4404)\alpha, 6473 + (5378 - 6473)\alpha] = [4404 + 974\alpha, 6473 - 1095\alpha]$$

5. Determinación de la distancia de Hamming entre los flujos de fondos actualizados a la tasa escogida y la inversión inicial.

$$\int_{\alpha\,\alpha=0}^{1} \left|5000 - [4404 + 974\alpha, 6473 - 1095\alpha]\right| \delta\alpha = 1181,20$$

6. Determinación de la distancia de Hamming con distintas tasas escogidas hasta encontrar aquella que minimice dicha distancia.

7. Comparación de las distintas distancias obtenidas y elección de la menor.

Después de realizar el trabajo especificado la tasa que minimiza la distancia de Hamming para el proyecto UNO es la de 0.77, con un valor de \$ 964,38. Esta tasa es la que se llama Pseudo-Tir, y para el proyecto DOS es la 0.67, generando un valor de \$ 1239,70, pudiendo es esta manera ordenarlos y decidir cuál es el mejor.

La borrosidad en la inmunidad financiera, una nueva visión de la Matemática de la Inversión

PARTE III – HIPÓTESIS DEL TRABAJO

María Antonia Artola

IDENTIFICACIÓN DEL PROBLEMA

1. Justificación del tema

Es interesante el concepto de empresa que aporta, Andrés S. Suárez Suárez, en su libro *"Decisiones óptimas de inversión y financiación en la empresa"*, definiéndola como una sucesión de proyectos de inversión y financiación, que nace para hacer frente a una demanda insatisfecha, superviviendo en el tiempo sólo cuando la rentabilidad de sus inversiones supere los costos del capital utilizado para la financiación.

Además indica que una adecuada gestión de activos y pasivos llevará a la empresa a un punto de equilibrio, haciendo máximo el beneficio y en consecuencia, la riqueza del accionista. Definiendo en consecuencia, que el objetivo general de toda empresa consiste en:

> ... *la maximización de la misma para sus accionistas, es decir, la maximización del valor de mercado de sus acciones.* (Suárez Suárez, 1996:35)

Al respecto cabe agregar que cualquier gestión empresarial no puede dejar de anticiparse al futuro, caso contrario desaprovechará oportunidades. Esta anticipación requiere lograr una adecuada estructura con la finalidad de concretar, un correcto mecanismo de toma de decisiones, mediante el uso de variadas herramientas, permitiendo establecer sistemas de información y control que proporcionen una mejor adaptación al entorno, de manera rápida y eficiente.

Con el presente trabajo se pretende complementar un tema de suma importancia para las organizaciones como es la evaluación de proyectos de inversión, tratando de mejorar la herramienta actual, *VAN* o *TIR*, inclusive en contextos inciertos, favoreciendo su procedimiento, sincerando el análisis, optimizando el resultado final que es la ***toma de una decisión***.

2. Fundamentación del tema

Ante expresiones vertidas por el profesor de esta Maestría, Celestino Carvajal, que entre otras cosas nos manifestó:

> *"La ganancia es lo que se lleva el capitalista por financiar el proceso, en lenguaje económico diríamos que paga la productividad marginal del factor multiplicada por su precio actualizado a la tasa de interés del mercado (no estamos suponiendo incertidumbre ni riesgo). En este contexto* ***la ganancia es la remuneración por la espera****, que se le paga al capitalista. Esto* ***lo vamos a ver en el cálculo del valor actual neto de un proyecto*** *–al actualizar flujos de fondos- en donde se determina el valor presente de un flujo de fondos futuro que se descuenta a una tasa determinada.*
>
> ***La tasa de descuento*** *que va a utilizar para descontar los ingresos futuros* ***se llama preferencia de tiempo*** *(preferencia de tiempo de consumir hoy en vez de mañana)...*
>
> *Esto demuestra que la tasa de interés es, en realidad, la tasa de intercambio de bienes presentes por futuros. Por eso decimos que la tasa de interés es previa a los mercados financieros."*

Estos párrafos fueron extraídos de la desgrabación de sus clases, a lo que agregó que el método alternativo al Valor Actual Neto, *VAN*, conocido como Tasa Interna de Retorno, *TIR*, no cumple con esta definición, por tal motivo *descartó* su análisis en el desarrollo de sus clases.

Esta idea provocó la intención de profundizar el estudio del tema, encontrando que el profesor Carvajal no es el único que piensa lo mismo, puede observarse todo lo que la doctrina opina al respecto en el Anexo al presente trabajo, ya mencionado anteriormente. En el mismo se resume el estudio de la bibliografía pertinente realizado por esta tesista.

Por otra parte no solamente se encontró la discrepancia en la bibliografía, sino también en los consejos de expertos en publicaciones referentes, como por ejemplo en un artículo del *Cronista*, de 17 de agosto de 2005, en la sección Negocios "para coleccionar", titulado *"Cuidado con la aplicación de la tasa interna de retorno"* se enuncia entre otras cuestiones:

Los gerentes de finanzas disfrutan viviendo al límite, ya que según una encuesta realizada en 1999, el 75% de ellos utilizan la TIR al evaluar proyectos de capital, a pesar que textos y académicos han advertido que este cálculo, basado en la hipótesis de reinversión, hacen parecer buenos a malos proyectos y extraordinarios a los buenos.

¿Qué justifica este uso indebido?

LA FACILIDAD DE COMPARACIÓN CON TASAS CONOCIDAS EN EL MERCADO.

¿Qué consecuencias puede acarrear?

- *Cuando deciden financiar sólo proyectos con las TIR más altas, es posible que se estén analizando cifras distorsionadas, destruyendo el valor para el accionista.*
- *Mayores riesgos empresariales, al generar expectativas poco realistas, brindando información confusa a inversores y recompensas exageradas al equipo gerencial.*

Este artículo argumenta que:

... el mayor problema es considerar a la TIR un retorno anual equivalente sobre una inversión dada, y esta definición es viable si el proyecto no genera flujos de caja intermedios o cuando estos pueden ser efectivamente reinvertidos a esa tasa. Pero cuando esa tasa es mayor a la que podrán reinvertirse los flujos, se sobreestimará el retorno anual equivalente del proyecto, caso que no ocurre con el VAN que supone que el costo de capital se puede recuperar a partir de sus flujos de caja intermedios.

¿Cuál es la solución?

- *Lo más directo sería no usar la TIR, pero su uso difundido lo hace imposible, una solución sería ajustarla al costo de capital de la compañía*
- *La utilización de la TIR modificada implica fijar tasas de reinversión intermedias más realistas, <u>incluyendo</u> al análisis la subjetividad del evaluador.*

Conclusión: este último párrafo impulsó a elaborar mi trabajo final de tesis en el análisis de una propuesta alternativa para evaluar proyectos de inversión que realiza

Alfonso Rodríguez, autor de los textos: *Matemática de la financiación* e *Inmunidad Financiera (Matemática de la inversión)*, enriqueciendo su metodología con lógica borrosa con la finalidad de mejorar un modelo actual y vigente de toma de decisiones, *VAN y/o TIR,* tratando de eliminar o atenuar la subjetividad que generan, considerando que esta lógica nos aporta el método más apropiado para los casos de toma de decisión en ambientes cargados de incertidumbre.

3. Borrosidad en las decisiones financieras dentro de la comunidad académica y científica en la actualidad

Este tema de decisión financiera ha sido abordado por muchos estudiosos de las aplicaciones de la matemática de la incertidumbre a los problemas de gestión en ambientes inciertos, por tal motivo se citarán en este apartado dos ejemplos concretos que sustentan la necesidad de generar nuevos modelos, complementarios de los tradicionales o enriquecidos mediante herramientas borrosas, para las disciplinas contable-administrativas, sobre las que se fundamenta el análisis que se pretende con este trabajo.

En primer lugar, para hacer notar la gran variedad de temas y las ventajas que la propuesta difusa pretende incorporar en temas de gestión, expondré el resumen que desarrolla Medina Hurtado (2006), en su trabajo "Estado de la cuestión acerca del uso de la lógica difusa en problemas financieros", que expresa:

> *"Este trabajo recopila el estado actual de las aplicaciones de la teoría de conjuntos difusos y los sistemas de inferencia difusos en la solución de problemas financieros, específicamente en el campo de la teoría de portafolios, la evaluación de proyectos, el análisis de crédito, el análisis técnico y el análisis financiero de la firma, lo cual permite incorporar la incertidumbre en el análisis de manera distinta a como la hace la teoría de probabilidades…. Con este enfoque es posible recoger los fenómenos económicos y financieros con toda su imprecisión y tratarlos matemáticamente; además, incorporar en el análisis el criterio experto, lo que hace que los modelos desarrollados sean una verdadera herramienta de apoyo a la toma de decisiones. Sin embargo, los desarrollos teóricos actuales tienden a fusionar tecnologías basadas en conocimiento para*

solucionar múltiples problemas de ingeniería y esto abre todo un campo de investigación para su aplicación a las ciencias sociales y económicas".

En segundo lugar, se informa sobre la trayectoria de una de las especialistas en esta temática, recalcando su labor en el campo de las Ciencias Sociales, como es la desarrollada por la Dra. Ana María Gil Lafuente, miembro de la Real Academia de Doctores y Profesora Titular de la Universidad de Barcelona, destacándose por la publicación de más de 140 trabajos de investigación, muchos de ellos presentados en diferentes congresos internacionales o publicados en revistas de renombre internacional, como por ejemplo la Fuzzy Economic Review, además por ser autora de 9 libros completos. Su obra, con referencia a algunos de los temas desarrollados, puede resumirse con el siguiente detalle de los títulos de sus libros: *El análisis financiero en la incertidumbre* (1990), *Técnicas de gestión financiera en la incertidumbre* (1993) y *El análisis de las inmovilizaciones en la incertidumbre* (2004).

Estas dos menciones específicas también sirven para fundamentar la elección del tema en el presente análisis, considerando la manifiesta necesidad, en la actualidad, que tienen las organizaciones de contar con herramientas que faciliten la información al momento de tomar decisiones en ambientes inciertos, mejorando de tal manera la sustentabilidad y permanencia de las mismas, evitando la subjetividad implícita cuando se trabaja con escasa información histórica que permita el uso de herramientas estadísticas, descriptivas y/o inferenciales, o cuando se desconoce el comportamiento futuro y para predecirlo se requiere de variada información, de la cual no se posee precisión, pero sí mucha cantidad, posiblemente referida a problemas similares o por requerimiento a expertos en la materia, características que en definitiva dificultan el proceso decisorio y en consecuencia el uso de los modelos tradicionales suelen no ser aptos para las problemáticas que requieren solución.

4. Definición de las hipótesis de trabajo

El problema percibido, conjuntamente con su propuesta de solución enriquecida para contextos inciertos, lleva a plantear las siguientes hipótesis de trabajo para la presente tesis:

- *El resultado derivado de las operaciones de Inversión, en reemplazo de los modelos tradiciones, principalmente de la TIR (por suponer que ésta tiene algunos errores conceptuales al creer que no mide rentabilidad), genera beneficios en la toma de decisiones al evaluar proyectos de inversión*
- *La Matemática Borrosa, cuando se trabaja en contextos con baja información, es decir inciertos, mejora considerablemente los modelos de decisión tradicionales, principalmente, sincerando el resultado final*

Con la finalidad de justificar la herramienta seleccionada, tratando de introducir una mejora en los mecanismos actuales de evaluación de proyectos, se transcriben a continuación algunos conceptos vertidos por el autor bajo estudio, que por otra parte manifiesta la necesidad de enriquecer su postura frente a contextos inciertos, que son donde se desarrollan la mayoría de estas evaluaciones:

La importancia que las valoraciones económicas están tomando en toda organización, genera una creciente necesidad de incorporar en sus modelos de gestión conceptos relacionados al cálculo financiero modernizado, lo que implica una revisión de los clásicos conocimientos dando paso a nuevas ideas sobre:

- ✓ *Influencia de la magnitud tiempo, que va más allá de la idea: dinero-liquidez.*
- ✓ *Valor económico determinado por la disponibilidad efectiva temporal de una cantidad de dinero, medible por el diferimiento o espera necesaria para su recuperación.*
- ✓ *Equivalencia financiera presente en los mercados.*

Estas concepciones generan el objeto de estudio de la matemática de la financiación, el que se complementa con la matemática de la inversión cuando se pasan a analizar conceptos tales como: preferencias, rendimientos o rentabilidades, estando su modelización actual excluida de la incertidumbre por considerarla no matematizable.

Considerando que el propósito de este trabajo es revertir esta última idea sobre la relación existente entre la gestión empresarial con la toma de *decisiones en contextos inciertos, es que se ha decidido analizar la obra del catedrático Alfonso Rodríguez (Universidad de Barcelona), por considerar que deja una puerta abierta al expresar en su texto, "Inmunidad Financiera", que: "Pendiente de contrastación se hallan posibles resultados derivados de la aplicación a este análisis de la Matemática borrosa".*(Rodríguez (2),1994:3)

Tratando de analizar la herramienta actual para la evaluación de proyectos de inversión, esta tesista, como miembro del Grupo de Investigación de Matemática Borrosa que desarrolla su actividad de investigación en el Centro de Investigaciones Contables de la Facultad de Ciencias Económicas y Sociales de la UNMDP, ha presentado algunos trabajos, principalmente en las Jornadas de Profesores Universitarios de Matemática Financiera, según el siguiente detalle:

- Trabajo titulado "Racionamiento de capital en los ambientes inciertos", presentado en las XXVII Jornadas desarrolladas en la Universidad Nacional de La Pampa, Santa Rosa, durante octubre de 2006.
- Trabajo titulado "Discrepancia entre el método del Valor Actual Neto y la Tasa Interna de Retorno: reformulación de la solución de Kameros para situaciones de incertidumbre", presentado en las XXVIII Jornadas desarrolladas en la Universidad Nacional de Río Cuarto, Córdoba, durante octubre de 2007.
- Trabajo titulado "Profundización del análisis de utilidad de la Tasa Interna de Retorno modificada para ambientes inciertos", presentado en las XXIX Jornadas desarrolladas en la Universidad Nacional de Mendoza, durante octubre de 2008[4].
- Trabajo titulado "El análisis de inversiones a través del plazo financiero medio y la tasa continua", presentado en las XXXIII Jornadas llevadas a cabo en la Universidad de Morón, durante octubre de 2012.

[4] Pueden encontrarse los trabajos para su análisis en la página del grupo de investigación: www.gimb.com.ar

La borrosidad en la inmunidad financiera, una nueva visión de la Matemática de la Inversión

PARTE IV – METODOLOGÍA

María Antonia Artola

MÉTODO DE INVESTIGACIÓN DESARROLLADO

El presente trabajo pretende encuadrarse, en una primera etapa, dentro de un estudio exploratorio de las herramientas actuales en la evaluación de proyectos de inversión, con la finalidad de conocer las ventajas y desventajas que las propuestas tradicionales ofrecen en contraposición con posturas más modernas.

En una segunda etapa se describirá, mediante modelos teóricos, cómo se comportan las variables que intervienen en el problema definido, con la finalidad de analizar la mejora que podría lograrse en la toma de decisiones empresariales, la propuesta desarrollada con el nombre de Operaciones de Inversión.

Para lograrlo se recurrirá al estudio de un caso teórico hipotético con el objetivo de analizar los resultados comparativamente, entre mecanismos tradicionales y modernos de evaluación de proyectos, describiendo las situaciones, brindando conocimiento acerca del fenómeno estudiado y/o comprobando o contrastando los efectos, relaciones o hipótesis dentro de diferentes contextos, certeza e incertidumbre.

1. Definición de los objetivos del trabajo

Objetivo general:

Mejorar la herramienta de evaluación de proyectos para la toma de decisiones, ampliando su tratamiento al contexto de incertidumbre.

Objetivos específicos:

1. Precisar y distinguir los puntos fuertes y débiles del herramental actual para la evaluación de proyectos de inversión.
2. Desarrollar y modelizar una nueva herramienta que mejore el proceso de evaluación de proyectos de inversión, en un ambiente de certeza.

3. Adaptar el modelo propuesto, en certeza, a ambientes de incertidumbre, sustentado en la lógica de los subconjuntos borrosos.
4. Aplicar el modelo propuesto a un caso concreto que pueda representar la realidad.

2. Metodología de desarrollo

Se utilizó la metodología de Mitroff y Kilman sobre la concepción "no estándar de las ciencias sociales" desde el enfoque interdisciplinario y la estructuración de las teorías de Thomas Kuhn.

Para concretar los objetivos se utilizó:

1. Análisis bibliográfico del tratamiento actual del herramental de evaluación de proyectos, *VAN* o *TIR*.
2. Análisis bibliográfico de la metodología propuesta como mejora del actual mecanismo.
3. Confección de un caso práctico de aplicación, con datos hipotéticos, pero que muestren una posible realidad dentro de las organizaciones.
4. Adecuación del modelo a ambientes inciertos.

Para finalizar el análisis, se exponen las conclusiones que surgen del modelo y la interpretación de sus resultados, definiendo posibles mejoras y ventajas, o el informe de la carencia de ellas.

3. Condiciones institucionales para el desarrollo de la tesis, infraestructura y equipamiento

Para el presente trabajo se utilizaron materiales propios, tanto bibliográficos como equipamiento para cálculos, de cualquier forma cabe destacar la amplia gama de links que la Facultad de Ciencias Económicas y Sociales brinda para la búsqueda de datos a través de su Centro de Documentación, como por ejemplo el portal Nülan, que están disponibles para toda la población mediante el ingreso a su página institucional.

La borrosidad en la inmunidad financiera, una nueva visión de la Matemática de la Inversión

PARTE V - DESARROLLO

María Antonia Artola

RESULTADOS DE LA INVESTIGACIÓN

1. Glosario de la propuesta bajo análisis

Teoría de la inmunización financiera: está sustentada en la formación de una cartera de títulos cuyo valor no se ve afectado por los cambios en los tipos de interés, existirán menores riesgos cuando los tipos de interés están más concentrados o menos dispersos.

Inmovilización: implica determinar cuánto tiempo se deberá mantenerse un capital para obtener determinado rendimiento, encontrándose definido por un vector formado por: cuantía y plazo, donde lo importante es ese plazo.

Rendimientos absolutos: en su determinación no importa la inmovilización, el plazo, únicamente se toma en cuenta la diferencia de cuantías, el ejemplo clásico de este concepto es el *VAN.*

Rendimientos relativos: están representados por tasas, denominadas de rendimiento o de rentabilidad y pueden mostrar:

- ✓ **Productividad**, este concepto está representado mediante el *PFM,* es decir la inmovilización, que expresa la diferencia entre los diferimientos medios de egresos e ingresos. Su análisis se extiende a la comparación con la *DUR* de Macauly, que trabaja primero con valores absolutos y luego incorpora valores actuales que no respetan la equivalencia financiera pero tiene una distribución más concentrada.
- ✓ **Costo financiero**, medida de rentabilidad

Diferimiento medio: también conocido como tiempo medio, es aquel que hace que una serie de capitales, colocados a diferentes tiempos, a una misma tasa, produzcan el mismo capital (ya sea actual o final, dada su equivalencia financiera).

Tasa de capitalización continua: es aquella en la que la frecuencia de capitalización tiende a infinito, lo que es lo mismo decir que el período de capitalización tiende a cero, matemáticamente se corresponde al límite de una tasa nominal y por lo tanto tiene su mismo tratamiento en el campo continuo, es decir es una tasa nominal.

2. Análisis e interpretación de una operación financiera de inversión

Para clarificar la propuesta de análisis, cuando una propuesta de inversión tiene ingresos y egresos, puede hacerse un paralelismo con los Estados Contables, en los cuales los activos representan bienes de diferente tiempo de realización (inmovilizados, circulante, deudores, efectivo), que serían nuestros "ingresos". Mientras que los pasivos indican compromisos con distintos plazos de exigibilidad, que podrían entenderse como "egresos".

La principal diferencia es que los Estados Contables no reflejan el principio de homogeneidad financiera, ya que se suman "bienes y deudas" de diversas inmovilizaciones, cuyas sumas (Total de Activo y Total de Pasivo) representan valores monetarios, no valores financieros y en un estado de equilibrio.

Por el contrario la liquidez o exigibilidad se mide por su diferimiento en el tiempo, lo que se corrige mediante el interés y se desarrolla en un estado de desequilibrio.

El valor actual homogeniza artificialmente, por ejemplo en los Estados Contables no representa la liquidez de los activos en el momento cero, ya que no existe la realización inmediata de todos los bienes. Realmente se requiere de una ley financiera que pueda medir las relaciones de sustitución, es decir un capital financiero actualizado, que tiene menor cuantía y mayor liquidez (diferimiento cero) puede ser considerado equivalente a su original diferido, aunque no necesariamente su reemplazo requiera mantener su sentido monetario y su liquidez.

En conclusión, un capital financiero está representado por un vector binario complejo, donde sus componentes, con magnitudes diferentes en cuantía y tiempo de diferimiento, para poder expresarlos, se recurre al álgebra vectorial mediante la reducción financiera, utilizando para ello el concepto de plazo o vencimiento medio financiero.

De esta forma una operación compleja, se reduce en una simple y se la puede definir simbólicamente de la siguiente manera, donde las dos primeras componentes representan la inmovilización financiera, cuantía y diferimiento y la última es la proyección del vector, que permite la determinación del rendimiento: $\vec{I} \equiv (\mathbf{C}, \mathbf{t}, \mathbf{C}')$ y su representación gráfica sería:

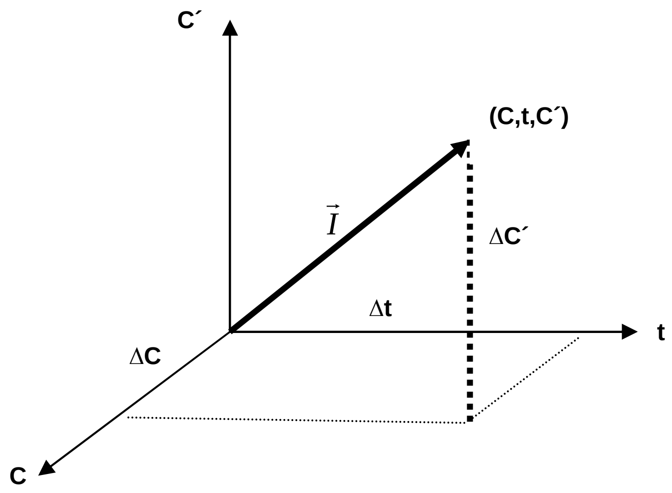


Ilustración 8 - Vector de una operación financiera (elaboración propia)

3. Un caso práctico

Se analizará un caso práctico, definiendo el modelo bajo los siguientes supuestos:

1. se considerará un ambiente simple estacionario, es decir constante en cuanto a la consideración del precio financiero, **ley financiera única con precio financiero constante**[5]
2. esto no significa que no se utilizará un sistema de tasas dinámico, pero quedará reducido a un modelo simple mediante el *PFM*

3.1. Datos

Período	0	1	2	3	4	5	6
Ingresos		2800	1400				1400
Egresos	1400			1400	1680	1960	

Los resultados obtenidos se encuentran explicados numérica y conceptualmente en los cuadros a continuación[6]:

[5] Este modelo se podrá generalizar a un ambiente financiero compuesto, con leyes dinámicas.
[6] El autor, en su libro, adjunta un disquete que calcula las magnitudes de los casos bajo análisis.

3.2. Parámetros de la Operación Financiera (*OFI*)

Indican las características generales de la operación:

Nombre	Simbología	Calculo
Cuantía agregada de ingresos	$C=\sum_{t=1}^{n}C_t$	$5600=2800+1400+1400$
Representa la suma nominal de los ingresos, es decir el total de ingresos provenientes de la inversión		
Cuantía agregada de egresos	$C'=\sum_{s=1}^{m}C'_s$	$6440=1400+1400+1680+1960$
Representa la suma nominal de los egresos, es decir el total de egresos erogados para desarrollar la inversión		
Constante	$k=\ln\frac{C'}{C}$	$0.139762=\ln\frac{6440}{5600}$
Representa la tasa efectiva del plazo total, es decir aquella que necesita el "total de ingresos" para convertirse en el "total de egresos", se determina despejando de la siguiente expresión: $C'=Ce^k$.		
Parámetro β	$\beta=$ $=\frac{\sum C'_s s}{C'}-\frac{\sum C_t t}{C}$	$0.7174=$ $=\frac{1400\cdot 0+1400\cdot 3+1680\cdot 4+1960\cdot 5}{6440}-\frac{2800\cdot 1+1400\cdot 2+1400\cdot 6}{5600}$
Representa el valor del *PFM* cuando la tasa es cero, ya que en ese punto se produce una indeterminación con este valor se logra la continuidad de la función		
Asíntotas 1. derecha	$A=T'_1-T_1$, es período del primer egreso, menos el período del primer ingreso	$A=0-1=-1$
2. izquierda	$B=T'_m-T_n$, es el período del último egreso menos el período del último ingreso	$B=5-6=-1$
Representan los valores que no van a alcanzar ni a derecha ni a izquierda, tanto el *PFM* como la *DUR* y son horizontales, en este caso es un valor único -1		
Óptimo del *PFM*	$t(\delta)=d(\delta)$	0.7368, es el valor de la función para una tasa del 0.0946143 efectivo o del 0.0904021 continuo
Representa el valor donde la *duration - DUR* se iguala al *plazo financiero medio - PFM*, se lo considera un óptimo porque si bien ambas funciones tienen similar comportamiento la primera es menos dispersa, como puede visualizarse fácilmente en el gráfico.		

Tasas de degeneración	$\frac{1}{\delta}\left(k-\ln\frac{V_0'}{V_0}\right)=0$	$\delta=-0.560040 \rightarrow i=-0.428814$ y $\delta=0.91592 \rightarrow i=1.499073$ Siendo: $i=e^{\delta}-1$
Representan las tasas que hacen el *PFM* nulo, es decir es la intersección de la función con el eje abscisas. Más importante sería destacar que a tasas mayores que las determinadas la inmovilización se convertirían en liquidez, es decir cuando el *PFM* es negativo, e implica que se trata de una *OFI* degenerada. En nuestro ejemplo se trata de una *OFI* estricta. En la expresión los símbolos representan: V_0' es el valor actual de los egresos y V_0 es el valor actual de los ingresos a una determinada tasa continua		
Tasas implícitas		$\delta=-0.706174 \rightarrow i=-0.506471$, $\delta=0.19632 \rightarrow i=0.216916$ y $\delta=0.723868 \rightarrow i=1.062396$
Representan las *TIRs* múltiples que resuelven esta *OFI,* es este caso son tres porque hay tres cambios de signos en los capitales a lo largo del plazo de evaluación. Por ejemplo, la función específica del Excel da como solución viable únicamente la segunda de estas tasas, elimina la negativa y la última por ser la mayor		
Tasas de inmunización 1. que hacen nula la *DUR* 2. *TFR,* tasa financiera de rentabilidad del plazo óptimo 3. *TFRN* tasa financiera de rentabilidad neta		1. $\delta=-0.286408 \rightarrow i=-0.249044$ y $\delta=0.455251 \rightarrow i=0.576569$ 2. $\delta=0.090407 \rightarrow i=0.09462$ 3. $\delta=0.541051 \rightarrow i=0.717812$
Representan cada una de estas tasas: 1. los límites para obtener una *DUR* positiva 2. una tasa nominal de rendimiento para el plazo óptimo 3. una tasa financiera de rentabilidad neta, su valor fue determinado por el programa que acompaña el libro.		

Tabla 4 - Características principales de una *OFI* (elaboración propia)

Muchas de estas magnitudes son fácilmente identificables a través de la representación gráfica de las funciones relacionadas: el plazo medio financiero (*PFM)*, la duration (*DUR)*, la hipérbola (*HIP)* y la desviación (*DES)*, como lo muestra la siguiente figura, que tiene su explicación a continuación:

1. La función *PFM* en más dispersa que la *DUR.*
2. Las funciones *PFM* y *DUR* se igualan en dos puntos:
   - uno es cuando la tasa es cero, conocido como parámetro β con un valor para las funciones de 0.7364 y

- el otro es considerado *PFM óptimo* que establece la *TFR*, una de las tasas de inmunización, cuyos valores son: 0.7368 y 0,0946 efectivo, respectivamente. Esta tasa es la que indica "productividad"

3. La intersección del *PFM* con el eje de abscisas muestra las tasas de degeneración, que marcan las zonas inmunidad (rentabilidad), para los valores -0.4288 y 1.4991 efectivo.
4. La intersección de la *DUR* con el eje de abscisas que marca la positividad de esta función, representadas por los valores: -0.2490 y 0.5766 efectivo, también son tasas de inmunización que indican rentabilidad, ya que al ser una función más concentrada ambos valores están en la zona indicada en el punto anterior.
5. Las tasas implícitas (*TIRs*) pueden observarse en la intersección de la función *DES* con el eje de abscisas, en el ejemplo tienen los valores: -0.5065, 0.2169 y 1.064 efectivo. También pueden verse en la igualación de las funciones *PFM* y *HIP*

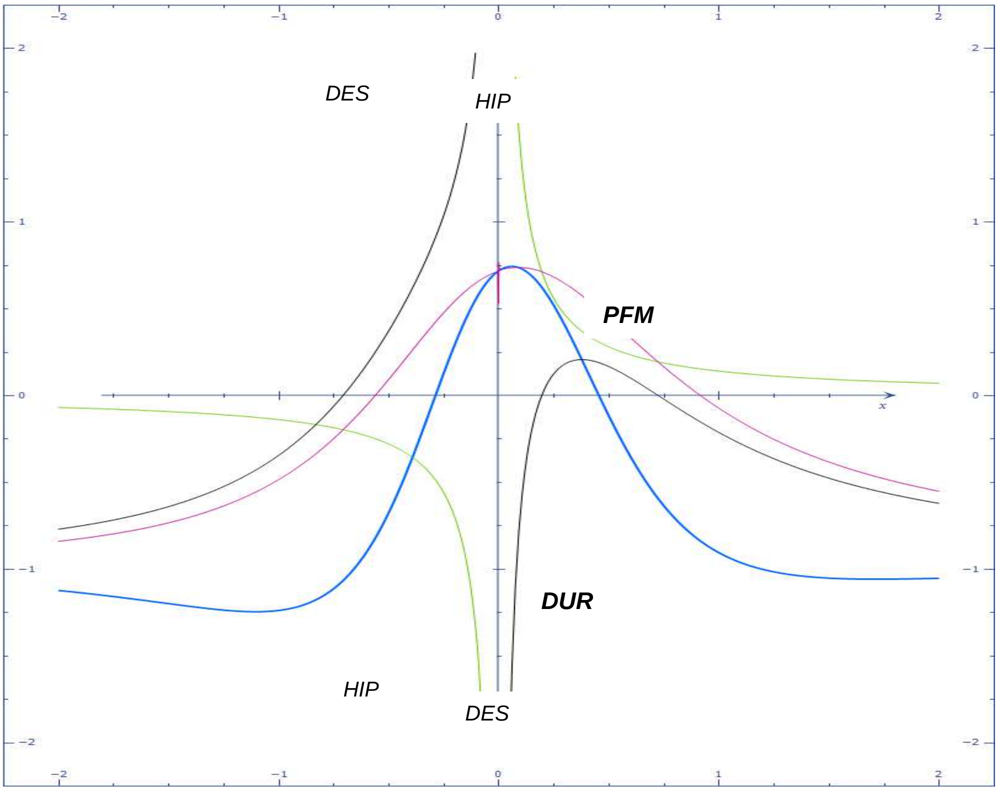


Ilustración 9 - Representación gráfica de las funciones básicas *PFM, y DUR,* y complementarias *HIP y DES* de la operación financiera (elaboración propia)

3.3. Magnitudes inmunizadas

Las mismas se calculan a partir de la tasa positiva que hace negativa la *DUR*, considerada una de las tasas de inmunización, en el caso analizado es de 0.4553 continuo y se muestran en el siguiente cuadro:

<table>
<tr><th>Nombre</th><th>Simbología</th><th>Calculo</th></tr>
<tr><td>Inmovilización</td><td>PFM</td><td>0.7368</td></tr>
<tr><td colspan="3">Representa el valor óptimo del plazo financiero medio para una tasa del 0.09462 efectivo e indica el plazo medio que inmoviliza fondos la operación</td></tr>
<tr><td>Rendimiento neto RN</td><td>$RN =$
$C' - Ce^{\theta=PFM_{dur=0}\delta^{dur=0}}$</td><td>$-577.49 = 6440 - 5600e^{0.4956(\cdot)0.455251}$</td></tr>
<tr><td colspan="3">Representa el resultado absoluto entre el total de egresos y el total de ingresos capitalizados a la tasa máxima que anula la DUR y el PFM para dicha tasa que se determina de la siguiente manera trabajando con la tasa efectiva:
$2800\cdot1.576569^{-1}+1400\cdot1.576569^{-2}+1400\cdot1.576569^{-6}=5600\cdot1.576569^{-T}$
$\rightarrow T = 1.833491321$
$1400+1400\cdot1.5766^{-3}+1680\cdot1.5766^{-4}+1960\cdot1.5766^{-5}=6440\cdot1.5766^{-T'}$
$\rightarrow T' = 2.329126657 \Rightarrow t = T' - T = 0.4956$</td></tr>
<tr><td>Valor actual neto del RN</td><td>$VAN = V_0' - V_0$</td><td>$-200.0056 = 2230.4233 - 2430.4293$</td></tr>
<tr><td colspan="3">Representa el valor actual neto, considerando la tasa inmunizada que anula la DUR, también se puede determinar actualizando el RN, considerando la tasa inmunizada y el plazo medio para los egresos, de la siguiente manera:
$-577.4851\cdot e^{-(0.455251\cdot2.329126657)} = -200.0056$</td></tr>
<tr><td>Tasa efectiva de RN</td><td>$\Gamma(\delta) = k - \theta(\delta)$</td><td>$-0.0859 = 0.139762 - 0.455251(\cdot)0.4956$</td></tr>
<tr><td colspan="3">Representa la diferencia de dos tasas efectivas del total del período, la que relaciona las cuantías agregadas y la correspondiente a la inmunización que otorga la mayor tasa que anula la DUR</td></tr>
<tr><td>Tasa de rendimiento bruto TRB</td><td>$\bar{r} = \dfrac{e^k - 1}{e^\theta - 1}$</td><td>$0.5926 = \dfrac{e^{0.139762} - 1}{e^{0.455251(\cdot)0.4956} - 1}$</td></tr>
<tr><td colspan="3">Representa el cociente entre los dos rendimientos efectivos totales, es la proporción del rendimiento total con relación al rendimiento total inmunizado. También se la puede determinar como la proporción que representa la diferencia de erogaciones sobre los intereses pagados inmunizados de la siguiente manera:
$\bar{r} = \dfrac{\bar{R}}{I} = \dfrac{C' - C}{C(e^\theta - 1)} = \dfrac{6440 - 5600}{5600(e^{0.4553\cdot0.4956} - 1)} = \dfrac{840}{1417.37} = 0.5926$</td></tr>
<tr><td>Tasa de rendimiento neto TRN</td><td>$\hat{r} = \bar{r} - 1$</td><td>$-0.4074 = 0.5926 - 1$</td></tr>
<tr><td colspan="3">Representa la proporción del rendimiento neto sobre el total de intereses pagados inmunizados. En simbología sería: $\hat{r} = \dfrac{\hat{R}}{I} = \dfrac{\bar{R} - I}{I}$</td></tr>
</table>

Tasa nominal bruta, tasa financiera de rendimiento *TFR*	$\overline{\delta} = \frac{k}{t(\delta)}$	$0.189696 = \frac{0.139762}{0.7368}$
Representa la proporción del rendimiento total con relación al plazo de inmovilización de la operación, es una tasa bruta porque relaciona las cuantías agregadas y sus plazos medios y expresa un rendimiento relativo endógeno de la operación.		
Tasa nominal neta *TFRN*	$\hat{\delta} = \overline{\delta} - \delta^0$	-0.19119
Cálculo: $\hat{\delta} = \overline{\delta} - \delta^0$ Representa una tasa exógena a la operación, considerando que incide en ella δ^0 que recoge el valor del interés en el mercado, por eso cuando esta tasa nominal neta en nula, implica que el rendimiento de la operación es igual al interés del mercado, por lo tanto la *TFR* coincidiría con la *TIR,* que es el caso donde la tasa no es significativa porque no hay rendimiento adicional. Recordando que estas tasas nominales representan rendimientos por unidad monetaria y por unidad temporal, a diferencia de las tasas efectivas que solamente representan rendimiento por unidad monetaria, tenernos: 1. la tasa efectiva de rendimiento bruto: $k = \overline{\delta} \cdot t$ 2. la tasa efectiva de rendimiento neto: $\Gamma = \hat{\delta} \cdot t$ Ambas expresan rendimientos estrictos, es decir netos del efecto de acumulación de la rentabilidad invertida, de la permanencia. Considerando las tasas nominales, quedaría expresar la tasa de mercado, que sería una tasa efectiva de interés estricta y queda: $\theta = \Gamma \cdot t$ El valor surge del programa de cálculo.		

Tabla 5 - Magnitudes inmunizadas (elaboración propia)

3.4. Magnitudes financieras para una tasa de interés de mercado

En este caso se utilizará un interés del 8% periódico efectivo:

Nombre	Simbología	Calculo
Rendimiento bruto *RB*	$RB = C' - C$	$840 = 6440 - 5600$
Representa la diferencia entre egresos e ingresos, no es un concepto financiero considerando que no hay reexpresión de los importes pertenecientes a diferentes diferimientos		
Costo Financiero *CF*	$CF = Ce^{PFM\,\delta^{mercado}} - C$	$326.5215 = 5600e^{0.7364(\cdot)0.076961} - 5600$ Siendo: $\delta^{mercado} = \ln 1.08 = 0.076961$
Representa el resultado absoluto de considerar la capitalización de los ingresos por su *PFM*		

Plazo medio financiero	$PFM =$ $PFM_{egresos} - PFM_{ingresos} =$ $\frac{1}{\delta^{mercado}} \ln \frac{C'}{V_0'} - \frac{1}{\delta^{mercado}} \ln \frac{C}{V_0}$	$0.7364 = \frac{1}{0.076961} \ln \frac{6440}{5080.1584} - \frac{1}{0.076961} \ln \frac{5600}{4675.1044}$
Representa el plazo financiero medio excedente, considerando los plazos medios de egresos e ingresos		
Rendimiento neto *RN*	$RN = C' - Ce^{PFM\,\delta^{mercado}} =$ $C' - C''$	$513.4785 = 6440 - 5600^{0.7364(\cdot)0.076961}$
Representa el resultado absoluto entre el total de egresos y el total de ingresos capitalizados a la tasa de mercado por el *PFM*		
Valor actual neto	$VAN =$ $\sum C_s' e^{(-s)\delta^{mercado}} - \sum C_t e^{(-t)\delta^{mercado}}$	$-405.0542 = 5080.1584 - 4675.1044$
Representa el VAN tradicional, como puede verse al 8% el proyecto no es viable		
Tasa efectiva neta	$\Gamma = \ln \frac{C'}{C''}$	$0.0831 = \ln \frac{6440}{5926.5224}$
Representa el rendimiento efectivo del total de gastos sobre los ingresos capitalizados por el *PFM*		
Tasa de rendimiento bruto *TRB*	$\bar{r} = \frac{RB}{CF}$	$2.5726 = \frac{840}{326.5215}$
Representa la variación relativa del rendimiento bruto sobre el costo financiero		
Tasa de rendimiento neto *TRN*	$\hat{r} = \bar{r} - 1 = \frac{RN}{CF}$	$1.5726 = 2.5726 - 1 = \frac{513.4785}{326.5215}$
Representa la variación relativa del rendimiento neto sobre el costo financiero		
Tasa nominal bruta *TFR*	$\bar{\delta} = \frac{k}{PFM}$	$0.189802 = \frac{0.139762}{0.7364} \rightarrow i = 0.209010$
Representa el rendimiento por unidad de tiempo, considerando como tiempo al plazo medio financiero de la operación		
Tasa nominal neta *TFRN*	$\hat{\delta} = \frac{\Gamma}{PFM}$	$0.112841 = \frac{0.0831}{0.7364} \rightarrow i = 0.119453$
Representa el rendimiento de los costos por unidad de tiempo, considerando como tiempo al plazo medio financiero de la operación		

Tabla 6 - Magnitudes financieras para una tasa de mercado del 8% efectivo (elaboración propia)

4. Ventajas de la propuesta

Mediante el caso analizado, para datos en condiciones de certeza donde las cuantías se han definido como valores ciertos, este modelo presenta las siguientes ventajas expresadas de manera simplificada:

1. permite la determinación de verdaderas tasas de rendimiento
2. produce una mejor selección de alternativas de proyectos de valuación, principalmente cuando del análisis tradicional surgen *TIRs* múltiples (además de su discusión de si las mismas son tasas de interés o de rendimiento), ya que aporta una solución óptima única.

5. Incorporación de la incertidumbre en las cuantías

Frente a un problema en condiciones de certeza, los directivos de una organización se comportan como si tuvieran información completa, es decir se relaciona un único estado de la naturaleza con cada curso alternativo de acción. Estos criterios de decisión son usados para seleccionar una y solo una de las alternativas que se presentan en el ámbito operativo, donde el horizonte de planeamiento es acotado, o cuando se ejerce la influencia suficiente como para controlar el escenario de desarrollo.

En cambio si la decisión es tomada en niveles estratégicos, el horizonte de planeamiento se expande y por lo tanto desaparece la situación de certeza, esto significa que ya no existe una relación unívoca entre las distintas alternativas que se le presentan al decididor y sus resultados. Es decir, se presentan varios estados de la naturaleza a los que se podrá asociar una probabilidad de ocurrencia, objetiva o subjetiva según su forma de cálculo, definiéndose las decisiones en contextos de riesgo, donde la probabilidad es una medida del grado de confianza que una persona tiene en la veracidad de un planteo dado, para lo cual se requiere información de la magnitud bajo decisión.

Muchas veces en el ámbito estratégico, el individuo debe tomar decisiones en un contexto en el que son escasas o nulas las situaciones repetitivas o la información que pueda tenerse de las mismas. En estos casos la incertidumbre no significa, necesariamente, ausencia de información, sino negación de certeza, incluso la falta de asociación a los distintos estados de la naturaleza de probabilidades de presentación pues las mismas no existen o no son conocidas por quien decide.

En estos ambientes inciertos es donde la matemática borrosa puede ser utilizada como complemento de las herramientas aplicables para la solución de problemas, con la finalidad de sincerar la información y mejorar consecuentemente la toma de decisiones.

Para comenzar con el análisis de problemas de decisión donde los datos se desarrollan en contextos inciertos se agregará un caso de aplicación definiendo las magnitudes como *intervalos de confianza - IdeC*, herramienta más sencilla para mostrar incertidumbre, que contengan el valor de certeza para poder comparar los resultados obtenidos con lo resuelto hasta el momento.

La finalidad es determinar si la incorporación de la borrosidad en la definición, en este caso de las cuantía, acarrea beneficios al modelo, dando una visión de la problemática más sincera al momento de tomar la decisión.

La hipótesis inicial que se supone, al incorporar la incertidumbre al modelo, es que traería la mejora de determinar un área de inmunización financiera, donde se diera el óptimo, lo que implica una zona donde los valores de tasas permiten una solución y no un único valor de tasa, donde se da la misma.

En definitiva, se expondrá el mismo ejemplo tomado en certeza, pero expresado en unidades borrosas, *IdeC*, mostrando la gráfica de los resultados obtenidos.

5.1. Datos adecuados a un ambiente incierto, magnitudes definidas en *IdeC*

Período	0	1	2	3	4	5	6
Ingresos		[2700,2900]	[1350,1450]				[1300,1500]
Egresos	1400			[1300,1450]	[1600,1750]	[1900,2030]	

La siguiente gráfica muestra el comportamiento de las funciones *PFM* y *DUR*, existiendo dos (*mínima y máxima*) para cada una de ellas por operar matemáticamente con los límites de los intervalos y de manera completa, las cuatro funciones, se observan a continuación:

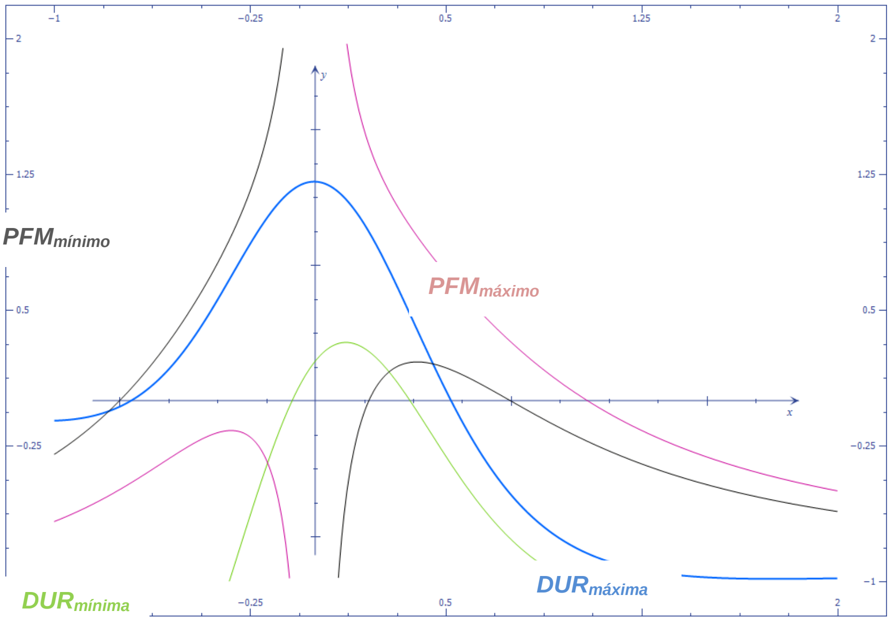


Ilustración 10 - Representación gráfica de las funciones básicas *PFM, y DUR,* máxima y mínima en cada una, de la operación financiera borrosa (elaboración propia)

5.2. Análisis de los resultados obtenidos

Referencias del gráfico y explicación de sus cálculos:

1. El parámetro β se determina de la siguiente manera[7]:

$$[\beta_{mínima}, \beta_{máxima}] = \frac{\sum [C'_{s-mínima} s, C'_{s-máxima} s]}{[C'_{mínima}, C'_{máxima}]} - \frac{\sum [C_{t-mínima} t, C_{tmáxima} t]}{[C_{mínima}, C_{máxima}]} =$$

$$= \frac{1400 \cdot 0 + [1300,1450]3 + [1600,1750]4 + [1900,2030]5}{1400 + [1300,1450] + [1600,1750] + [1900,2030]}$$

$$- \frac{[2700,2800] + [1350,1450]2 + [1300,1500]6}{[2700,2800] + [1350,1450] + [1300,1500]} =$$

$$= \frac{[19800,21500]}{[6200,6630]} - \frac{[13200,14800]}{[5350,5850]} = [2.9864, 3.4677] - [2.2564, 2.7664] = [0.2201, 1.2113]$$

2. El parámetro k se determina de la siguiente manera:

[7] Este parámetro, podría determinarse no como *IdC* conforme a los datos originales, sino como dos valores independientes, uno para cada función *PFM* máxima y mínima, con la finalidad de conseguir su continuidad.

$$\left[k_{mínimo}, k_{máximo}\right] = \ln\frac{\left[C'_{mínimo}, C'_{máximo}\right]}{\left[C_{mínimo}, C_{máximo}\right]} = \ln\frac{\left[6200, 6630\right]}{\left[5350, 5850\right]} = \ln\left(\left[6200, 6630\right]\left[\frac{1}{5850}, \frac{1}{5350}\right]\right) =$$
$$= \ln\left[1.0598, 1.2393\right] = \left[0.0581, 0.2145\right]$$

3. La función *PFM borroso,* expresada en *IdeC* se definirá mediante la siguiente expresión:

$$\left[t_{mínimo}, t_{máximo}\right] = \frac{1}{\delta}\left(\left[k_{mínimo}, k_{máximo}\right] - \ln\frac{\left[V'_{0-mínimo}, V'_{0-máximo}\right]}{\left[V_{0-mínimo}, V_{0-máximo}\right]}\right) =$$
$$= \frac{1}{\delta}\left(\left[0.0581, 0.2145\right] - \ln\frac{\left(1400e^{-0\delta} + \left[1300, 1450\right]e^{-3\delta} + \left[1600, 1750\right]e^{-4\delta} + \left[1900, 2030\right]\right)e^{-5\delta}}{\left[2700, 2900\right]e^{-\delta} + \left[1350, 1450\right]e^{-2\delta} + \left[1300, 1500\right]e^{-6\delta}}\right)$$

4. La función *violeta* corresponde a la gráfica del *PFM máximo*, parece no tener continuidad a pesar que se puede calcular un β que es positivo

Se graficó mediante la siguiente expresión:

$$t_{máximo} = \frac{1}{\delta}\left(k_{máximo} - \ln\frac{V'_{0mínimo}}{V_{0máximo}}\right) = \frac{1}{\delta}\left(0.2145 - \ln\frac{1400e^{-0\delta} + 1300e^{-3\delta} + 1600e^{-4\delta} + 1900e^{-5\delta}}{2900e^{-\delta} + 1450e^{-2\delta} + 1500e^{-6\delta}}\right)$$

5. La función *negra* corresponde a la gráfica del *PFM mínimo*, que tampoco refleja continuidad, graficándose con la siguiente expresión:

$$t_{mínimo} = \frac{1}{\delta}\left(k_{mínimo} - \ln\frac{V'_{0máximo}}{V_{0mínimo}}\right) = \frac{1}{\delta}\left(0.0581 - \ln\frac{1400e^{-0\delta} + 1450e^{-3\delta} + 1750e^{-4\delta} + 2030e^{-5\delta}}{2700e^{-\delta} + 1350e^{-2\delta} + 1300e^{-6\delta}}\right)$$

6. La función *DUR borrosa,* expresada en *IdeC* se determinará mediante la siguiente expresión:

$$\left[d_{mínima}, d_{máxima}\right] = \frac{\sum\left[C'_{r-mínima}, C'_{r-máxima}\right]T'_r e^{T'_r}}{\sum\left[C'_{r-mínima}, C'_{r-máxima}\right]e^{T'_r}} - \frac{\sum\left[C_{r-mínima}, C_{r-máxima}\right]T_r e^{T_r}}{\sum\left[C_{r-mínima}, C_{r-máxima}\right]e^{T_r}} =$$
$$= \frac{1400\cdot 0e^{-0\delta} + \left[1300, 1450\right]\cdot 3e^{-3\delta} + \left[1600, 1750\right]\cdot 4e^{-4\delta} + \left[1900, 2030\right]\cdot 5e^{-5\delta}}{1400e^{-0\delta} + \left[1300, 1450\right]e^{-3\delta} + \left[1600, 1750\right]e^{-4\delta} + \left[1900, 2030\right]e^{-5\delta}} -$$
$$\frac{\left[2700, 2900\right]e^{-\delta} + \left[1350, 1450\right]\cdot 2e^{-2\delta} + \left[1300, 1500\right]\cdot 6e^{-6\delta}}{\left[2700, 2900\right]e^{-\delta} + \left[1350, 1450\right]e^{-2\delta} + \left[1300, 1500\right]e^{-6\delta}}$$

7. La función *azul* corresponde a la gráfica de la *DUR máxima,* la que fuera graficada mediante la siguiente expresión.

$$d_{máxima} = \frac{\sum C'_{r-máxima} T'_r e^{T'_r}}{\sum C'_{r-mínima} e^{T'_r}} - \frac{\sum C_{r-mínima} T_r e^{T_r}}{\sum C_{r-máxima} e^{T_r}} =$$
$$\frac{1400\cdot 0e^{-0\delta} + 1450\cdot 3e^{-3\delta} + 1750\cdot 4e^{-4\delta} + 2030\cdot 5e^{-5\delta}}{1400e^{-0\delta} + 1300e^{-3\delta} + 1600e^{-4\delta} + 1900e^{-5\delta}} - \frac{2700e^{-\delta} + 1350\cdot 2e^{-2\delta} + 1300\cdot 6e^{-6\delta}}{2900e^{-\delta} + 1450e^{-2\delta} + 1500e^{-6\delta}}$$

8. La función *verde* corresponde a la gráfica de la *DUR mínima* y la expresión que permite su gráfica sería la siguiente:

$$d_{mínima} = \frac{\sum C´_{r-mínima} T_r´ e^{T´_r}}{\sum C´_{r-máxima} e^{T´_r}} - \frac{\sum C_{r-máxima} T_r e^{T_r}}{\sum C_{r-mínima} e^{T_r}} =$$

$$\frac{1400 \cdot 0e^{-0\delta} + 1300 \cdot 3e^{-3\delta} + 1600 \cdot 4e^{-4\delta} + 1900 \cdot 5e^{-5\delta}}{1400e^{-0\delta} + 1450e^{-3\delta} + 1750e^{-4\delta} + 2030e^{-5\delta}} - \frac{2900e^{-\delta} + 1450 \cdot 2e^{-2\delta} + 1500 \cdot 6e^{-6\delta}}{2700e^{-\delta} + 1350e^{-2\delta} + 1300e^{-6\delta}}$$

5.3. Aporte al modelo tradicional

Si el óptimo surge de la igualdad entre ambas funciones, se identifica en el gráfico que existen dos puntos de unión entre el *PFM mínimo* y ambas funciones de la *DUR, máxima* y *mínima,* como lo que se busca es un ***área óptima*** y para el cuadrante positivo del gráfico, que es donde se representa inmovilización (no liquidez), definiendo un *OFI* degenerada o estricta, por ser el de utilidad a los términos de las decisiones de inversión, se define dicha área hasta el eje de abscisas, esto se da por considerar que el *PFM máximo* no se define en la zona señalada.

Se muestra, más detalladamente, el ***área óptima*** en el siguiente gráfico:

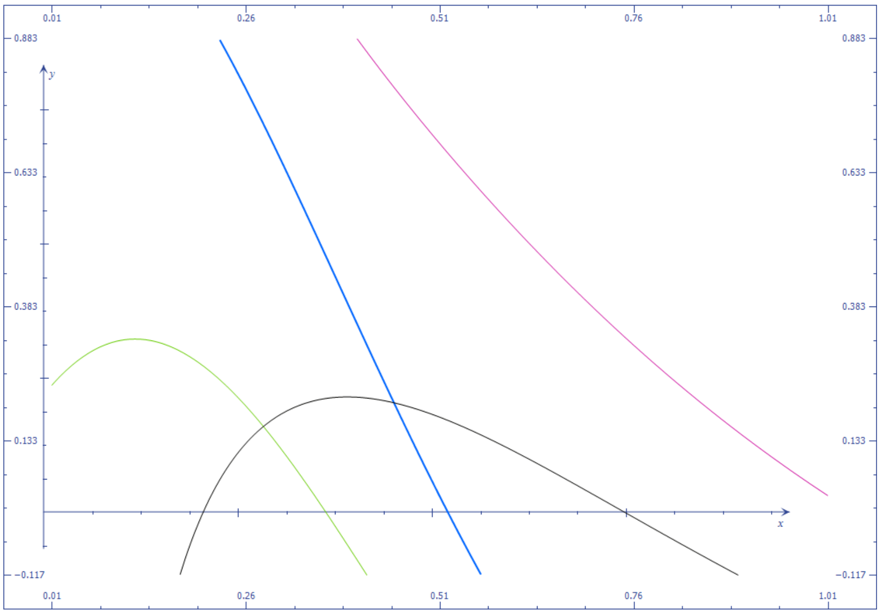


Ilustración 11 - Representación del cuadrante positivo de la gráfica de las funciones básicas, determinación del *área óptima*, de la operación financiera borrosa (elaboración propia)

En conclusión el **área óptima** estaría formada por la figura trapezoidal determinada por los siguientes valores:

En función de la tasa continua: $\text{\textit{área óptima}}_{(\delta)} = (0.2826, 0.3632, 0.4509, 0.5204)$

En función de la tasa efectiva: $\text{\textit{área óptima}}_{(i)} = (0.3266, 0.4380, 0.5697, 0.6828)$

La mejora al modelo es la determinación de un "área" para la determinación de la tasa de interés o rendimiento óptima inmunizada, en contraposición al dato único que se ofrece en el modelo tradicional, siempre considerando que estamos en presencia de operaciones de inversión definidas en ambientes inciertos (pudiéndose presentar la incertidumbre en cualquiera de las variables que la conformen).

La ventaja de definir un "área" para la tasa óptima inmunizada es que se obtiene un rango de valores para dicha tasa, que mejor resuelve los problemas de inversión y permite sincerar la información a brindar para la toma de decisiones en ambientes inciertos[8].

En nuestro ejemplo los valores arrojan las siguientes *consideraciones:*

1. para porcentuales efectivos menores al 32,66% y mayores al 68,28% el plazo financiero medio será negativo, entre ambos valores dicho plazo será positivo, esto significa que son los límites para considerar al plazo como de inmovilización, en contraposición con plazo de liquidez.
2. para porcentuales efectivos comprendidos entre 43,80% y 56,97%, dicho plazo medio financiero positivo, se encontrará inmunizado, es decir tendrá menor volatilidad.

[8] La intención de este análisis era determinar un área similar a la que se fija cuando se establece un punto de equilibrio borroso, el inconveniente que surgió que mientras para el mencionado las variables son lineales, en este análisis no lo son, lo que determina la visualización más precisa de la misma. Ver trabajo: "Punto de equilibrio: una solución para el tratamiento de la incertidumbre", año 1998, disponible en http://www.gimb.com.ar/trabajos-publicados/publicaciones-en-1998

La borrosidad en la inmunidad financiera, una nueva visión de la Matemática de la Inversión

CONCLUSIONES

María Antonia Artola

CONCLUSIONES

Esta propuesta de análisis pretendió enriquecer un modelo objetivo, que aporta mejores herramientas de información para que el decidor optimice sus acciones, considerando que el valor monetario de un bien, servicio o cualquier factor productivo, se expresa mediante una unidad de referencia dineraria. Normalmente el mercado realiza una valoración objetiva, fundamentada en un estado de equilibrio financiero, pero generalmente el que debe tomar una decisión debe realizar una valoración paralela, que siempre es subjetiva.

En este caso se ha estudiado una propuesta de mejora de los modelos tradicionales, *VAN* y *TIR.* Al trabajar con activos, ingresos u otro elemento patrimonial se tiende a pensar en "grados de liquidez", mientras que la incorporación de pasivos o egresos suman al análisis los "grados de exigibilidad". Para ambas nociones se utilizó, para medirlo, el concepto financiero de plazo medio, como medida de valor económico, considerado como tiempo de espera, "diferimiento", reducido a una unidad líquida y disponible.

El modelo propuesto presenta una interesante y efectiva solución a las críticas que se hacen a las herramientas tradicionales de análisis, ya que determina una verdadera tasa de rendimiento en las operaciones de inversión, que tiene su fundamento en operaciones con desequilibrio, al contrario de las operaciones financieras que tienen su origen en operaciones de equilibrio de mercado.

El modelo analizado, también aporta una solución a problemas surgidos de la evaluación de proyectos con flujos alternados (con cambios de signo), que originan *TIRs múltiples*, al determinar, como resultado final, una tasa óptima que tiene características de inmunizada, es decir, de ser menos dispersa (menos afectada por la volatilidad del comportamiento temporal de las tasas).

La intención del presente trabajo fue enriquecer este modelo para mejorar las decisiones en ambientes de incertidumbre, que son las que generalmente rigen en operaciones de inversión a mediano y largo plazo (inclusive en ambientes muy tumultuosos el corto plazo puede requerir de estas propuestas novedosas y enriquecedoras), surgiendo un "área óptima" para la determinación de la tasa que mide la rentabilidad del proyecto con menor volatilidad. Que a diferencia de "un solo" valor para su definición, regala al tomador de la información un intervalo de valores porcentuales donde se obtendrá una rentabilidad óptima.

Del desarrollo de la investigación, puede inferirse que se han cumplido los objetivos propuestos de la siguiente manera:

Con respecto al objetivo general:

Se mejoró la herramienta de evaluación de proyectos para la toma de decisiones, ampliando su tratamiento al contexto de la incertidumbre, considerando que el modelo analizado aporta soluciones a algunos de los problemas detectados como críticas a los tradicionales, como son los casos de TIRs múltiples. Logrando generar información más sincera.

Con respecto a los objetivos principales:

1. Se analizaron los puntos fuertes y débiles de las herramientas tradicionales, que son reconocidos por todos los expertos en el tema, ya sea bajo el rol de defensores, o no, del *VAN* y/o *TIR.* Su resumen fue expuesto en el apartado Evaluación de proyectos de inversión del Marco Teórico.

   Dentro de los principales inconvenientes que los especialistas se plantean, encontramos: la jerarquización, cuando se analizan varios proyectos; las tasas múltiples, cuando se presentan flujos de signos alternados; la comparación de proyectos de diferente inversión inicial o de distinto plazo de realización; cuando difiere el criterio de selección entre el *VAN* y el *TIR*; etc.

   Destacando como conclusión principal, que para todos estos inconvenientes, los estudiosos han generado soluciones para ambos modelos, que pueden sintetizarse con la siguiente idea, expuesta por esta tesista en trabajos previos presentados en eventos académicos de los que es asistente regular:

   > *… a pesar de las diferencias e inconvenientes que producen los estimadores tradicionales utilizados para la medición de los flujos de caja, a*

modo de resumen se puede afirmar que: cualquier criterio de análisis o selección de proyectos de inversión será COMPLEMENTARIO y NO SUSTITUTIVO …

2. El modelo analizado propone una mejora en el proceso de evaluación de proyectos de inversión, para ambientes de certeza, con una serie de determinaciones muy interesantes. Entre otras se identifican como ventajas: la determinación de tasas óptimas inmunizadas, para plazos medios de inmovilización, que además produce una mejor selección de alternativas de proyectos en valuación, principalmente cuando del análisis tradicional surgen *TIRs* múltiples, ya que aporta una solución óptima única. El inconveniente que podría tener el modelo es de cálculo, considerando que la propuesta del autor viene con un dispositivo, entiendo, que en la actualidad se encuentra obsoleto (disquete, con un programa en DOS), lo que hace suponer, que para su puesta en funcionamiento, se requiera en la actualidad de un programador que desarrolle el programa -soft- en dispositivos y lenguajes más modernos, considerando que el modelo tiene una gran carga de matemática pura y de gráfica de funciones muy importante, mediante las cuales se determinan los resultados buscados.
3. Se adaptó el modelo propuesto en certeza, a ambientes de incertidumbre, sustentado en la lógica de los subconjuntos borrosos mediante intervalos de confianza, obteniendo resultados que permiten sincerar la información, ya que se obtuvo un "área óptima" para la tasa de interés inmunizada. Es decir, el decididor recibe más información del proyecto bajo análisis.
4. Se aplicó el modelo propuesto enriquecido con borrosidad, para un caso concreto hipotético, cuyos resultados específicos fueron expuestos en el apartado respectivo, representando la realidad de manera más objetiva y sincera.

Derivado de este último punto, siguiendo una propuesta académica, de ámbito nacional e internacional, de adecuación del herramental tradicional para la toma de decisiones en nuestras disciplinas contable-administrativas, puede afirmarse que ante situaciones de cambio constante de las normas que rigen las relaciones económicas, donde se desarrollan las organizaciones, la información que brinda una estimación en términos de certeza puede resultar más inexacta que una estimación en términos imprecisos si ambas son realizadas en el campo de la incertidumbre.

Que al abandonar las exigencias de las hipótesis de los modelos clásicos se produce un acercamiento a la realidad, donde la utilización de la matemática borrosa en la modelización y resolución de problemas en ambientes inciertos permitirá, a falta de ser más exactos, ser más honestos (Kaufmann y Gil Aluja, 1992) mejorando la información disponible para la toma de decisiones.

Finalmente cabe expresar que la realidad con la que se enfrenta el profesional en Ciencias Económicas es visiblemente distinta a los modelos que presenta la bibliografía clásica para el estudio y análisis de temas como la selección de proyectos de inversión, entre otros, en los cuales o existe total incertidumbre, o la misma se presenta en un grado elevado. Es por ello que la aplicación de la matemática borrosa adquiere gran importancia en el análisis y estudio de estos temas, para adaptar las herramientas y modelos disponibles en procura de una mejora en la gestión de empresas bajo las mencionadas condiciones de incertidumbre (Mallo, et al; 1998).

Finalmente, bajo este paraguas que permite la utilización de la matemática borrosa en los problemas de toma de decisiones en ambientes inciertos, mejorando la información brindada a los usuarios de la misma se ha obtenido un área óptima de resolución para una operación de inversión, aportando un rango de valores para la determinación de la mejor tasa de rentabilidad para dicha operación, por su condición de inmunizada, lo que ***"nos permitirá, a falta de ser más exactos, ser más honestos"***, mejorando la información disponible para la toma de decisiones.

La borrosidad en la inmunidad financiera, una nueva visión de la matemática de la inversión

ANEXO

María Antonia Artola

ANEXO: CONCEPTOS RELACIONADOS A LA VALUACIÓN DE UN PROYECTO DE INVERSIÓN

I. Análisis de lo expuesto por diferentes autores que incorporan el tema desde el punto de vista del cálculo financiero

1. Autores: Oscar Murioni y Ángel A. Trossero, libro: “Tratado de Cálculo Financiero”

En el punto V del Apéndice, titulado: *Flujo de fondos – Su valuación*, definen algunos conceptos de la siguiente manera:

Consideran que un flujo de fondos es una serie de ingresos y egresos que se presentan en una operación no concluida, que muchas veces es continua pero a los efectos del análisis se les aplica capitalización discreta, utilizando un diagrama de flujos para su representación y los conceptos de valor actual y final para su valuación.

También definen la *TIR* como la tasa que iguala el *VAN* del flujo de fondos, con la inversión inicial, que se busca por tanteo y que los criterios de selección son los siguientes:

- $VAN \prec 0 \;\rightarrow\; i \succ TIR$ (debe intentarse con una tasa menor)
- $VAN = 0 \;\rightarrow\; i = TIR$
- $VAN \succ 0 \;\rightarrow\; i \prec TIR$ (debe intentarse con una tasa mayor)

Finalmente introducen varios ejemplos de cálculo resueltos, para diferentes análisis, concluyendo que: *los flujos positivos son reinvertidos a la TIR así como los negativos son descontados a la TIR. Esto hace que el dinero invertido gane intereses compuestos a la TIR.*

Para solucionar esto recomiendan utilizar diferentes tasas, indicando que el procedimiento sería hallar:

- la *TIR* tradicional
- la *TIR* que iguala el valor actual neto de los egresos a una tasa mayor, considerando que los fondos se toman a un costo más alto y que representa la inversión inicial, con el valor actual neto de los ingresos
- la *TIR* que iguala el valor actual de los flujos negativos a una tasa menor, con el valor final de los flujos positivos a una tasa de reinversión mayor, en simbología:
$$\sum_{t=0}^{n} \frac{\text{Flujos negativos}}{\left(1+\text{i}_{\text{baja}}\right)^{t}} \left(1+TIR\right)^{n} = \sum_{t=0}^{n} \text{Flujos positivos} \left(1+\text{i}_{\text{alta}}\right)^{t}$$

2. Autor: Mario A. Gianneschi, libro: “Curso de Matemática Financiera”

En el capítulo 19, titulado: *Aplicaciones a la teoría de la inversión*, define algunos conceptos de la siguiente manera:

Introduce la diferencia entre inversión real y financiera, considerando a la primera aquella que se encara para producir bienes o servicios, mientras que la segunda pretende lograr un rédito de capital, que lleva implícita una serie de flujos.

Por su parte, considera que los flujos pueden ser costos, que representan desembolsos, o beneficios, que constituyen percepciones.

Finalmente, indica que valuar económicamente un proyecto supone fijar "temporalmente" esos flujos de manera "cuantitativa", para lo cual el cálculo financiero da las herramientas apropiadas, entre las que menciona:

- Valor presente o *VAN*, el cual se calcula como la diferencia entre: el valor actual de los beneficios y el de los costos, utilizando una tasa de descuento "relevante" (que es la que indica la conveniencia, considerando que a otra tasa puede no serlo), de tal forma que: $VAB - VAC = VAN \quad y \quad VAN \geq 0 \Rightarrow \text{proyecto viable}$

- Relación beneficio-costo, representada por un valor relativo, ya que relaciona los valores actuales netos anteriores mediante un cociente, de tal forma que: $\frac{VAB}{VAC} \geq 1 \Rightarrow \text{proyecto viable}$

- Tasa de retorno, siendo la tasa que iguala los valores actuales mencionados en el primer punto, y para establecer la viabilidad de un proyecto se la debe comparar con una tasa establecida a tal fin como relevante

Para este último procedimiento menciona como **problema**, las tasa múltiples, que se producen cuando los flujos tienen cambio de signo (pasan de beneficios a costos), más de una vez en la vida del proyecto, esto implica que habrá tantas tasas como cambios se produzcan.

3. Autor: Aída Beatriz Castegnaro, libro: "Curso de Cálculo Financiero"

En el capítulo XIII, titulado: *Evaluación de proyectos*, define los dos criterios de evaluación dando sus características, las que pueden resumirse en el siguiente cuadro:

	VAN	TIR
- **Rentabilidad** medida en términos	**Absolutos** Incremento o disminución de capital	**Relativos** Tanto de interés
- **Interés**	▪ Plantea una rentabilidad mediante una tasa **exógena o extrínseca** ▪ La introduce el evaluador ▪ Es la tasa de interés esperada para inversiones de igual riesgo	▪ Encuentra una tasa **endógena o intrínseca** ▪ Propia del proyecto
- **Regla de aceptación**	$VAN \geq 0 \quad \Rightarrow$ incremento de capital ❖ Además, no debe	$TIR \geq i \quad \Rightarrow$ que la colocación de fondos fue a mayor tasa que la del mercado

	descapitalizarse por conseguir fondos ❖ Tienen igual criterio si son proyectos de inversión o de financiación	❖ Además, los fondos se obtienen a menor tasa ❖ Tienen diferente criterio si se trata de proyectos de inversión o de financiación

También presenta los inconvenientes de la siguiente manera:

- Con respecto al *VAN*:
  - Explicitar el tipo de interés
  - Los flujos positivos se reinvierten a la misma tasa, lo que puede salvarse colocándolos a diferente tasa, obteniendo un *VAN modificado*
  - No permite comparar proyectos con diferente espacio temporal, lo que puede salvarse trasladando el proyecto de menor vida a la del otro, de forma tal que la duración de uno sea múltiplo de la del otro; o bien valuar ambos proyectos considerando una duración común donde: $n \to \infty$

- Con respecto a la *TIR*
  - Se producen múltiples tasas en proyectos no simples, con flujos alternados entre positivos y negativos
  - Tiene como supuesto que los ingresos del proyecto se reinvierten a la *TIR* y los egresos se financian a la *TIR*, puede solucionarse calculado diferentes tasas para ingresos y egresos, determinando una *TIR modificada*

Concluye afirmando que ambos criterios son: *COMPLEMENTARIOS y NO SUSTITUTIVOS.*

4. Autores: María T. Casparri, Alicia Bernardello, Ricardo P. Gotelli, Javier García Fronti y Mariano Rodríguez, libro: "Matemática Financiera, utilizando Microsoft Excel"

En el capítulo 10, titulado: *Evaluación de Proyectos de Inversión: VAN y TIR*, nos dicen que la teoría de la inversión debería proporcionar los criterios de racionalidad para determinar si una inversión es conveniente y en caso de necesidad, los indicadores para poder jerarquizar o rankear proyectos viables, considerando que el fin supremo de cualquier empresa es obtener una ganancia óptima sobre el capital invertido.

Definen al *Valor-capital* o *VAN* como la sumatoria de todos los gastos e ingresos ocurridos en el horizonte económico de la inversión, actualizados al inicio por un tipo de interés predeterminado. Dicho interés es denominado tasa de actualización o costo de oportunidad, porque representa la rentabilidad esperada, que dejamos de obtener al colocar los fondos en determinado proyecto.

De esta manera, como los fondos no son ilimitados, siempre se debe tomar como costo de oportunidad, el más alto o marginal, sobre todo si la inversión no se encuadra en la definición del *core business* de la empresa.

Por supuesto indican los mismos criterios de selección ya vistos para otros autores, es decir:

- El *VAN* positivo, representa un proyecto viable, porque los ingresos superan los gastos, incluido el costo de oportunidad o la rentabilidad mínima requerida.
- El *VAN* negativo, representa un proyecto no aceptable, por encontrarnos en la situación inversa de la anterior.
- El *VAN* neutro, representa un proyecto indistinto, porque los resultados compensarían los costos.

Con respecto a la *TIR* la definen como el tipo de interés al cual los ingresos y egresos son equivalentes, en este método para determinar la viabilidad de realizar el negocio es necesario comparar esta tasa de rentabilidad interna, con aquella que se defina como mínimo necesario para afrontar el riesgo, según los autores (siguiendo a Keynes) sostienen que los empresarios invertirán hasta que la *TIR* de la inversión marginal, iguale a la del mercado, *denominada eficiencia marginal del capital*.

Mencionan como problema para este método, las raíces múltiples o raíz única no unificada que pueden surgir ante un capital negativo, incluso afirman que una de sus posibles soluciones, la *TIR ampliada*, puede arrojar resultados incoherentes.

Establecen que la diferencia entre ambos métodos *surge que aplican tasas de reinversión diferentes, y aunque no difieren al establecer el corte en la selección de los proyectos, en determinados casos pueden diferir en el rankeo de los mismos.*[9]

Por supuesto que concluyen que se puede programar un ordenador para que haga el trabajo de selección, siendo el criterio para la *TIR* aceptar un proyecto donde el costo de oportunidad sea menor que la tasa interna de rentabilidad, y por supuesto si estamos en este caso el *VAN* será positivo si lo descontamos a esa tasa que representa el costo de oportunidad.

Finalmente concluyen que, *cuando comparamos el costo de oportunidad del capital con la TIR de nuestro proyecto, lo que realmente estamos preguntando, es si nuestro proyecto tiene un VAN positivo. <u>El criterio TIR es, tanto como el VAN una técnica basada en flujo de fondos descontados, por lo que dará una respuesta correcta si es correctamente aplicado</u>.*[10]

II. Análisis de lo expuesto por diferentes autores que incorporan el tema desde el punto de vista del cálculo financiero

1. Autores: Richard A. Breadley, Stewart C Myers y Alan J. Marcus; libro: "Principios de Dirección Financiera"

En el capítulo 6, titulado: *Criterios de inversión de proyectos*, mencionan que las *decisiones de inversión* son *centrales para el éxito de la empresa* y que los criterios que se utilizan para seleccionar proyectos son:

- El *VAN* que *mide la contribución de cada proyecto a la riqueza del accionista*
- La *TIR esperada*, que *permite su comparación con la* tasa esperada de rentabilidad *que los accionistas podrían ganar en inversiones de riesgo equivalente* en los mercados de capitales

[9] Conceptos vertidos en el último párrafo de la página 189 del texto citado.
[10] Conceptos expuestos por los autores en los últimos párrafos de la página 193 del texto anterior.

- También mencionan el plazo de recuperación y la tasa de rendimiento contable, criterios que no se incluirán en el presente análisis por considerarlos complementarios de los anteriores y tener deficiencias técnicas ampliamente difundidas en la doctrina

Para el *VAN* se establecen cuatro pasos:
1. predecir los flujos de tesorería
2. estimar el costo de oportunidad del capital
3. descontar los flujos futuros mediante el costo estimado
4. finalmente, comparar el flujo futuro descontado con la inversión inicial, para determinar si crea un incremento de riqueza, siendo el criterio: invertir en aquellos proyectos de *VAN* positivo

La **ventaja** es que este procedimiento se puede aplicar a proyectos de cualquier tipo y duración (bancos, construcción de un puente, etc.), incluso podrían existir diferentes tipos de costos en cada período, de ser necesario.
La **desventaja** es que su cálculo es tan bueno como puede serlo la previsión de los flujos de tesorería subyacentes.

En el caso de la *TIR* definen como criterio de invertir en aquellos proyectos que ofrezcan una tasa de rentabilidad mayor que el costo de oportunidad del capital.

Afirman que ambos criterios establecen en mismo punto de referencia, pues un proyecto con *VAN* igual a cero, tendrá una *TIR* igual al costo de oportunidad.

Además, establecen que no existe ambigüedad en su cálculo para una inversión que genere un único flujo de tesorería al cabo de un período.

Por otra parte, manifiestan que no se debe confundir la *TIR* con el costo de oportunidad del capital, ya que la primera representa la rentabilidad del proyecto, ya que depende únicamente de sus flujos de tesorería propios, mientras que el segundo es un estándar para decidir si se acepta el proyecto y que es igual al ofrecido por otras inversiones equivalentes en riesgo en el mercado.

Finalmente establecen los principales **inconvenientes** del procedimiento de la siguiente manera:

- Es diferente el criterio, considerando la inversión, préstamo o endeudamiento, para analizar esto introducen un ejemplo muy sencillo.

	Flujos periódicos			
Proyecto	Momento 0	Momento 1	***TIR***	***VAN al 10%***
1	-1000	1500	0.50	363.64
2	1000	-1500	0.50	-363.64

Como puede observarse ambos proyectos tienen igual *TIR*, por lo que podría concluirse que la elección es indiferente, pero si analizamos en el proyecto 1 vemos que se está pagando cierto dinero hoy para recibir cierta cantidad mayor a un período, realmente se está prestando y si esta fuera la tipología, como prestamista debería requerirse la tasa más elevada.

Mientras que en el proyecto 2 se está recibiendo cierto dinero hoy para devolver determinada suma en un futuro, se está produciendo un endeudamiento y, por tal motivo, el requerimiento tendría que ser la menor tasa posible.

En este ejemplo el *VAN* estaría dando un mejor criterio de selección, ya que refleja para el proyecto 2 un valor negativo.

- El problema de la *TIR* múltiple. Cuando los flujos tienen cambios de signo, de positivos a negativos, encontramos más de una solución a la ecuación planteada.

- Proyectos mutuamente excluyentes. Es decir, cuando no pueden desarrollarse dos proyectos deberá seleccionarse el que añada mayor riqueza a la empresa y esto no suele reflejarse en el proyecto de mayor *TIR.* La solución a este inconveniente podría estar en determinar la *TIR* de los flujos incrementales.

- Finalmente, cuando se tienen proyectos que además de ser mutuamente excluyentes tienen diferente horizonte temporal, el criterio de la *TIR* suele favorecer los proyectos más cortos sin ser los mejores.

2. Autor: James C. Van Horne; libro: "Administración Financiera"

En el Capítulo III, titulado: *Evaluación de proyectos de inversión* comienza con un análisis más amplio, a los efectos de simplificarlo, presume que la tasa de rendimiento está dada y es la misma para todo el proyecto de inversión, lo que requiere que se mantengan invariables las decisiones de financiamiento e implica la selección de cualquier proyecto o combinación de ellos que no altere el *riesgo operativo global*, que existe de manera independiente del riesgo de financiamiento, considerándolo como la *dispersión relativa* de la utilidad operativa de la empresa.

La tarea de evaluar un proyecto implica:
- Estimar los flujos, que requiere información del futuro
- Evaluarlos, para lo cual pueden utilizarse varios métodos
- Seleccionarlos
- Revaluarlos, una vez aceptados

Los diferentes métodos de evaluación de proyectos pueden sintetizarse de la siguiente manera:
- Tasa contable de ganancia$=\dfrac{\text{Promedio ganancia anual}}{\text{Inversión media}}$, la virtud de este método es la sencillez de su cálculo.
- Período de recupero$=\dfrac{\text{Inversión inicial}}{\text{Ingresos netos promedios}}$, este valor se compara con un máximo fijado, el inconveniente es que no considera los flujos que superan el plazo de recupero.
- Métodos basados en valores actuales, considerados más correctos, ya que consideran tanto la magnitud como la oportunidad para toda la vida útil, entre ellos encontramos:
  - *Tasa financiera de rendimiento*, que es la tasa de descuento que iguala el valor actual de los ingresos, con el valor actual de los egresos.

- *Valor actual neto*, considerando todos los flujos a una tasa de rendimiento requerido o tasa de corte.
- *Método de exclusión y dependencia*, es decir cuando un proyecto depende de la previa aceptación de otro.
- *Índice de rentabilidad*, cociente entre el valor actual de los ingresos futuros y la inversión requerida.

A continuación de la presentación de los métodos de evaluación, desarrolla una comparación entre el *Valor actual* y la *Tasa financiera de rendimiento*, de los que indica que generalmente conducen a igual decisión.

Marca que la principal diferencia es que, ambos métodos, *parten de diferentes supuestos respecto de la tasa de rendimiento producida por la reinversión de los fondos que son liberados, o que son producidos por cada proyecto*:

- La *Tasa financiera de rendimiento*, **implica** *que los fondos liberados ganan, al ser reinvertidos, la misma tasa que rinde el proyecto*
- El *Valor actual neto*, i**mplica** *que la reinversión se realiza a la tasa de corte, utilizada como factor de descuento*

Al tratar de contestar cuál es el mejor método, nos indica que este interrogante deriva en otro que consiste en preguntarse cuál es la tasa a que se reinvertirán los fondos producidos por cada proyecto, para lo contesta que la *solución ideal* sería tomar la tasa esperada por las reinversiones para cada período y calcular el monto final, pero si hay que considerar alguno de los métodos como superior, este autor establece que el *VAN*, en general, es teóricamente superior, porque si utilizamos la Tasa financiera de rendimiento, cada proyecto tiene implícita diferentes tasas de reinversión.

Con respecto a este tema establece:

> *... Cuando un proyecto tiene un rendimiento elevado, se supone que se obtendrá una alta tasa por las reinversiones; cuando un proyecto tiene un pobre rendimiento, se atribuye también una baja tasa a las reinversiones. Es evidente que rara vez la tasa de un proyecto coincidirá con la tasa de rendimiento que se obtendrá de la reinversión de los fondos liberados. Con el método de valor actual, en cambio, la tasa implícita de reinversión (que es la tasa de corte) es la misma para todos los proyectos. En esencia, esta tasa de reinversión representa la rentabilidad mínima de toda oportunidad que haya de ser aceptada por la empresa, porque en principio no se aceptará proyecto alguno que rinda menos que esa tasa. La tasa implícita de reinversión en el método de valor actual quizás es conservadora, pero tiene la virtud de que se la aplica uniformemente a todos los proyectos de inversión. En la medida en que podemos considerar que la tasa de corte k se acerca a la posible tasa de las oportunidades de reinversión posibles, el método de valor actual sería mejor que el de tasa de rendimiento.*[11]

Finalmente establece, que el método de la *Tasa de rendimiento*, puede ser modificada, de manera que incluya un análisis incremental, es decir de la siguiente manera:

- Se calculan la diferencia de flujos de dos proyectos

[11] Conceptos obtenidos del texto citado, en página 80.

- Se calculada la tasa de rendimiento de dicho proyecto diferencial, en el caso que ésta supere la tasa de corte establecida, se deberá elegir el proyecto con mayor valor de ingresos netos absolutos (no descontados).

Termina el tema tratando diversos temas relacionados, como: la amortización en el reemplazo de los bienes de uso y el tratamiento del racionamiento de fondos en la selección de proyectos, adjuntando un apéndice dedicado a herramientas de matemática financiera.

3. Autor: Andrés S. Suárez Suárez; libro: "Decisiones óptimas de inversión y financiación en la empresa"

En la Parte II, titulada: *La inversión en la empresa*, es interesante el concepto de empresa que aporta, definiéndola como una sucesión de proyectos de inversión y financiación, que nace para hacer frente a una demanda insatisfecha, superviviendo en el tiempo sólo cuando la rentabilidad de sus inversiones supere los costos del capital utilizado para la financiación.

Además indica que una adecuada gestión de activos y pasivos llevará a la empresa a un punto de equilibrio, haciendo máximo el beneficio y en consecuencia, la riqueza del accionista. Definiendo en consecuencia, que el objetivo general de toda empresa consiste en *la maximización de la misma para sus accionistas, es decir, la maximización del valor de mercado de sus acciones.*[12]

También establece que el concepto de inversión es uno de los más difíciles de delimitar, para el cual fija cuatro elementos indispensables:

- Un sujeto que invierta, persona física o jurídica
- Un objeto en el qué invertir, de diversa naturaleza
- El costo que supone la renuncia de una satisfacción presente
- La esperanza de una recompensa en el futuro

Inversión, que puede analizarse desde distintos puntos de vista, pero desde la dimensión financiera implica la existencia de una corriente de cobros y pagos (denominados flujos de caja o cash-flow).

Entre otros temas presenta diferentes clasificaciones de inversiones, estableciendo en una primera instancia distintos métodos de valoración y selección que define como aproximados, que pueden calcularse y resumirse de la siguiente manera:

- $r' = \frac{\sum_{j=1}^{n} Q_j}{A} = \frac{1}{A}\sum_{j=1}^{n} Q_j$, flujo neto de caja total por unidad monetaria comprometida, expresión a la que puede restársele uno, ya que lo que excede de la unidad representa rentabilidad
- $\bar{r}' = \frac{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} Q_j}{A} = \frac{\bar{Q}}{A}$, flujo neto de caja medio anual por unidad monetaria comprometida

[12] Objetivo expuesto por el autor en la página 35 del texto citado.

- $P = \frac{A}{Q}$, período de recupero considerando un flujo constante
- $\text{tasa de rendimiento} = \frac{\text{Beneficio medio anual}}{\text{Inversión total}}$, tasa de rendimiento contable

Después de exponer estos métodos, incluidas sus limitaciones, desarrolla el criterio del *Valor Capital*, que lo define como: *el valor actualizado de todos los rendimientos esperados*, estableciendo como su principal ventaja la de tener en cuenta los diferentes vencimientos de los flujos de caja y como inconvenientes los siguientes:

- especificar el tipo de descuento o de actualización
- la hipótesis de reinversión , la que establece que sería cierta si el mercado financiero fuera perfecto, es decir a la empresa se le presentan dos alternativas: realizar la inversión o colocar los fondos en el mercado financiero a un interés *k.* Considerando en la realidad que este mercado es el más imperfecto, la empresa casi nunca tiene esta posibilidad

Finalmente expone el criterio de la *Tasa de Retorno*, cuya definición indica que es aquel tipo de actualización o descuento que hace igual a cero el *Valor Capital,* estableciendo que su principal dificultad es de orden práctico, centrándose en la resolución de la ecuación que únicamente admite el procedimiento de prueba y error.

Con relación a la hipótesis de reinversión de los flujos intermedios que se dispone para el criterio, consistente en reinvertir los flujos positivos, mientras dure la inversión, a un interés similar a la tasa de rentabilidad obtenida, por supuesto financiando los flujos negativos a idéntica tasa, la define como paradójica, porque lleva implícita la leyenda "interna" y hay que buscarla fuera de la inversión para poder reinvertir sus propios fondos.

Por último, establece una situación de inconsistencia cuando se establecen varias tasas de retorno positivas y ninguna de retorno real, conocido como el problema de tasas de retorno múltiples.

Es importante el análisis que desarrolla de analogías y diferencias entre ambos sistemas, definiendo que los dos conducen al mismo resultado en las decisiones de aceptación o rechazo tratándose de inversiones simples, pueden tener diferente jerarquización, debiéndose a ambos criterios se apoyan en supuestos diferentes y miden aspectos diferentes de la inversión, uno mide una rentabilidad relativa y el otro una absoluta.

En las consideraciones finales del análisis, expresa que muchos economistas consideran a la *TIR* una tasa natural, que represente la verdadera eficacia marginal de capital; mientras que para otros, representa una mera convención matemática desprovista de todo significado económico, expresa: *¡Qué significado económico tiene un tipo de actualización que iguala a cero el valor capital!* También indica que los economistas modernos se muestran partidarios por el *Capital Valor,* porque representa mejor el objetivo general de la empresa, estableciendo que el principal problema consiste en identificar la tasa de actualización, para la cual la tasa de retorno podría convertirse en un buen referente. Finalmente según el autor, no se debe elegir entre uno u otro método, sino que deben complementarse en su análisis, incluso con algún otro de los vistos, por ejemplo el plazo de recupero, de esta forma

al tomar la decisión se tendrá en cuenta la rentabilidad absoluta, la relativa y el grado de liquidez de la inversión.[13]

Terminando el análisis que desarrolla este autor, presenta una solución a la inconsistencia de las tasas múltiples, resumiendo que en la práctica la solución consiste en actualizar al momento cero, al tipo de descuento *k*, los flujos negativos y capitalizar al momento *n*, los flujos de caja positivos, para finalmente determinar la denominada *tasa de retorno rectificada*.

4. Autor: Eduardo M. Candioti, libro: "Administración Financiera. A base de recetas caseras"

En el capítulo III, titulado: *Aspectos cuantitativos*, establece como primer medida que un peso de hoy no vale lo mismo que mañana, que existe un fenómeno de enriquecimiento por el transcurso del tiempo, cuya diferencia es el interés.

En sus "recetas" enseña a valuar un negocio que se esté planeando mediante el clásico *VAN*, caracterizando sus componentes como:

- magnitudes positivas o negativas (una o varias)
- sin regla de presentación (iguales o distintas)
- a intervalos de tiempos (iguales o distintos)

También establece como mecanismo de cálculo la *TIR*, enseñando a calcularla, estableciendo que ambos métodos son dos formas de observar un mismo fenómeno y explica que están concatenados.

Si bien establece que la *TIR* es un instrumento "maravilloso" para determinar la rentabilidad de un proyecto, establece que hay casos en que no se obtiene un resultado único, presentándola como "ganadora de prestigio", ya que es citada por la prensa económica como el indicador indiscutido en el análisis de inversiones, expresando:

> *Afortunadamente, ha sido superada una vieja polémica que enjuiciaba su validez si los fondos que liberaba no podían ser recolocados a la misma tasa. Por suerte quedan pocos seguidores de esa crítica. El error se originó por no haberse distinguido claramente entre proyecto e inversor.*
>
> *El proyecto exhibe su TIR y el inversor, si es atraído, lo fecunda con sus ahorros. A su vez, cuando el proyecto libera los fondos a favor del inversor, éste dispondrá como quiera. Los consumirá, o los invertirá en otros proyectos. Hoy se ve claramente cuán erróneo era exigir que el inversor mantuviera la misma rentabilidad para los fondos que recuperaba, para poder validar la TIR de un proyecto que nada tiene que ver con costos.*[14]

Finalmente, sin tomarlo como un problema, presenta la temática de los resultados múltiples.

5. Autores: Eduardo M. Candioti y colaboradores, libro: "Tasa Interna de Retorno. Resultados múltiples"

[13] Ver conceptos expuestos en página 84 y siguiente del texto
[14] Corresponde a los cuarto y quinto párrafos de la página 51 de la obra citada.

Este libro está completamente dedicado al análisis numérico del comportamiento de la *TIR* frente a diferente distribución de flujos de fondos siendo interesante destacar algunas conclusiones, como por ejemplo:

- *El progreso electrónico aceleró la operatoria de búsqueda de la TIR ... La enorme versatilidad que proporcionó esta técnica puso también al descubierto el "virus" más temible, es decir, las llamadas "raíces múltiples" o "resultados múltiples" ...*[15]
- *La aparición de raíces múltiples descarta la posibilidad de que la TIR sea un indicador válido para la toma de decisiones. Algunos investigadores siguen analizando la posibilidad de encontrar explicaciones al observar que se yuxtaponen comportamientos de inversor y prestatario.* Considerando que: *la aparición de tasas múltiples se produce cuando el flujo de fondos que las genera desarrolla, sucesivamente, el rol de inversor y prestatario sucesivamente.*[16]

Si bien, hay una concreta mención a uno de los inconvenientes que presenta este método, no tiene el libro una solución concreta para el problema, en sus conclusiones menciona, la exigencia de control de calidad en los flujos que dan origen a los resultados múltiples y que rara vez se producen en proyectos, denominados racionales.

[15] Corresponde a conceptos vertidos por los autores en las páginas 8 y 9 del texto citado.
[16] Corresponde a las conclusiones aportadas por los autores en las páginas 18 y 19 del mismo texto.

La borrosidad en la inmunidad financiera, una nueva visión de la matemática de la inversión

BIBLIOGRAFÍA

María Antonia Artola

BIBLIOGRAFÍA

BREALEY, Richard A., Stewart C. MYERS y Alan J. MARCUS (1996). *Principios de Dirección Financiera*, España. Mc.Graw-Hill/Interamericana de España S.A.

BUNGE, Mario (1987), *La ciencia, su método y su filosofía*, Buenos Aires, Argentina. Ediciones Siglo Veinte.

BUNGE, Mario (1985). *Racionalidad y realismo*. Madrid, España. Alianza Editorial.

CANDIOTI, Eduardo M. y colaboradores (1998), *Tasa Interna de Retorno. Resultados múltiples*, Entre Ríos, Argentina. Editorial Universal Adventista del Plata, 1ra edición.

CANDIOTI, Eduardo M. (1997). *Administración Financiera. A base de recetas caseras.* Entre Ríos, Argentina. Editorial Universal Adventista del Plata, 3ra. edición.

CASPARRI, María T., Alicia BERNARDELLO, Ricardo P. GOTELLI, Javier GARCÍA FRONTI y Mariano RODRÍGUEZ (2005). *Matemática Financiera, utilizando Microsoft Excel*". Argentina. Omicron System S.A.

CASTEGNARO, Aída B. (2006). *Curso de Cálculo Financiero*. Buenos Aires, Argentina. La Ley S.A., 1ra. edición.

ENCICLOPEDIA y biblioteca virtual de las Ciencias Sociales, Económicas y Jurídicas (2011). "Lógica difusa". <http://www.eumed.net/dices/definicion.php?dic=1&def=136> [Consulta: 27 ene. 2011].

EPISTEMOWIKIA, *Revista «Hiperenciclopédica» de Divulgación del Saber* (2011). <http://campusvirtual.unex.es/cala/epistemowikia/index.php?title=L%C3%B3gica_Borrosa/Introducci%C3%B3n_a_la_L%C3%B3gica_Borrosa> [Consulta: 27 ene. 2011].

FASSIO, Adriana, Liliana PASCUAL y Francisco M. SUÁREZ (1990). *Introducción a la Metodología de la Investigación*. Buenos Aires, Argentina. Macchi, 2da.edición.

GIANNESCHI, Mario A. (2005). *Curso de Matemática Financiera*. Buenos Aires, Argentina. Macchi, 2da. edición.

GÓMEZ, Ricardo I. (1987). *Enfoques metodológicos en Ciencias Sociales*. Tandil, Argentina. Publicaciones de la Universidad Nacional del Centro.

HERNÁNDEZ SAMPIERI, Roberto, Carlos FERNÁNDEZ COLLADO y Pilar BAPTISTA LUCIO (2001). *Metodología de la Investigación*. México. McGraw-Hill, 2da. edición.

KAUFMANN, Alfred y Jaume GIL ALUJA (1992). *Técnicas de gestión de empresas*. Barcelona, España. Pirámide.

KOSKO, Bart (2011). "Lógica difusa. ¿Una concepción infinitesimal de la verdad?", referencias. <http://personal.telefonica.terra.es/web/mir/ferran/kosko.htm> [Consulta: 27 ene. 2011].

LAUGERO, Lorena (2011), "La importancia de la matemática borrosa" <http://www.intercom.com.ar/inst127/Revista/06/> [Consulta: 27 ene. 2011].

LÓPEZ, Jesús A. (2011). Tripod, artículo "Lógica borrosa". <http://members.tripod.com/jesus_alfonso_lopez/FuzzyIntro.html> [Consulta: 27 ene. 2011].

MALLO, Paulino E., María A. ARTOLA, Fabián DAMICO, Mónica V. GARCÍA, Diego MARTÍNEZ y Mariano E. PASCUAL (1998). "Selección de Inversiones en un Ambiente Incierto". *Anales 19 Jornadas Naciones de Profesores Universitarios de Matemática Financiera*, pp. 38-74. La Plata, Argentina.

MALLO, Paulino El, M. Antonia ARTOLA, Mónica V. GARCÍA, Diego MARTÍNEZ, Marcelo J. GALANTE, Mariano E. PASCUAL y Mariano MORETTINI (2001). "Justificación de la aplicación de Tecnologías Emergentes a las disciplinas contables y administrativas". *Anales del VIII Congreso Internacional de Gestión y Economía Fuzzy*, pp. 265-278. Nápoles, Italia.

MALLO, Paulino E., María A. ARTOLA, Mónica V. GARCÍA, Diego MARTÍNEZ, Marcelo J. GALANTE, Mariano E. PASCUAL y Mariano MORETTINI (2001). "Evaluación financiera de proyectos: ¿Riesgo o incertidumbre?". *Anales de las XXII Jornadas Nacionales de Profesores Universitarios de Matemática Financiera*, resumen y trabajo completo en CD. Concordia, Argentina.

MALLO, Paulino E., M. Antonia ARTOLA, Marcelo J. GALANTE, Mariano E. PASCUAL, Mariano MORETTINI y Adrián R. BUSETTO (2002). "Inflación en épocas de incertidumbre". *Anales de las XXIII Jornadas Nacionales de Profesores Universitarios de Matemática Financiera,* sin numerar. Ciudad Autónoma de Buenos Aires, Argentina.

MALLO, Paulino E., M. Antonia ARTOLA, Mónica V. GARCÍA, Diego MARTÍNEZ, Marcelo J. GALANTE, Mariano E. PASCUAL y Mariano MORETTINI (2005). "La medición de variables cualitativas en el balance Scorecard. Un aporte de la lógica difusa". *Congreso Metropolitano de Ciencias Económicas*. Ciudad Autónoma de Buenos Aires, Argentina.

MALLO, Paulino E., M. Antonia ARTOLA, Marcelo J. GALANTE, Mariano E. PASCUAL, Mariano MORETTINI y Adrián R. BUSETTO (2006). "Racionamiento de capital en los ambientes inciertos". *XXVIII Jornadas Nacionales de Profesores Universitarios de Matemática Financiera*. Santa Rosa, La Pampa, Argentina.

Mallo, Paulino E., María A. Artola y Mariano Morettini (2012). "El análisis de inversiones a través del plazo financiero medio y la tasa continua", *XXXIII Jornadas Nacionales de Profesores Universitarios de Matemática Financiera*. Morón, Buenos Aires, Argentina.

Massé, Pierre (1959). *La elección de las inversiones*. Barcelona, España. Ediciones Sagitario.

Medina Hurtado, Santiago (2006). "Estado de la cuestión acerca del uso de la lógica difusa en problemas financieros". *Cuadernos de Administración,* volumen19, número 32. Bogotá, Colombia. Disponible en: <http://www.scielo.unal.edu.co/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0120-35922006000200009&lng=es&nrm> [Consulta: 27 nov. 2012).

Murioni, Oscar y Ángel A. Trossero (1981). *Tratado de Cálculo Financiero*. Buenos Aires, Argentina. Editorial Tesis.

Rodríguez, Alfonso (1994;1). *Matemática de la financiación*. Barcelona, España. Ediciones S.

Rodríguez, Alfonso (1994;2). *Inmunidad financiera (matemática de la inversión)*. Barcelona, España. Ediciones S.

Rodríguez Rodríguez, Alfonso M. (2008). "Una revisión económica del valor: el valor financiero. Su aplicación al análisis financiero de la inversión". <http://diposit.ub.edu/dspace/bitstream/2445/2261/4/arr-cast.pdf,> [Consulta: 17 may. 2011].

Schneider, Erich (1956). *Teoría de la Inversión*. Buenos Aires, Argentina. El Ateneo.

Suárez Suárez, Andrés S. (1996). *Decisiones óptimas de inversión y financiación en la empresa*. España. Ediciones Pirámide S.A., decimoctava edición.

Terceño, Antonio, José M. Brotons y Aurelio Fernández (2007). "Inmunization strategy in a fuzzy environment". *Revista Fuzzy Economic Review, v*olume XII, number 2, pp. 95-118. España.

Van Horne, James C. (1976). *Administración Financiera*. Buenos Aires, Argentina. Ediciones de Contabilidad Moderna.