

Autocatálisis en el Juego Evolutivo
Un modelo de Producción con dinámicas complejas

Sergio Oscar Anchorena

pollo_mdp@yahoo.com

Facultad de Ciencias Económicas y Sociales, Universidad Nacional de Mar del Plata.

Resumen: En este trabajo se presenta una variación de las dinámicas de replicador que permite modelar dinámicas complejas, económicas y biológicas, que incluyan relaciones autocatalíticas. La autocatálisis es la relación que, según el sociólogo Niklaus Luhmann (1990), es el principio organizador de los sistemas sociales. A partir de esto se presenta un modelo de juego simétrico autocatalítico, que simula un sistema productivo, con dinámicas complejas correspondientes al Bruselador de Prigogine y Lefever, que, dada una determinada provisión constante de insumos, presenta oscilaciones y ciclos límites en factores y productos.

Códigos Temáticos: C62. C73.

Autocatalysis in Evolutionary Game:

A production model with complex dynamics

Abstract: In this work a variation of replicator dynamics, that permit to model complex dynamics, economic and biological, that include autocatalytic relationships, is presented. Auto catalyses is the relationship, say the sociologist Niklaus Luhmann (1990), that is the organizing principle of the social systems. Starting from this relationship, a model of catalytic symmetric game is introduced, the game represents a production system with complex dynamics of Prigogine and Lefever's Bruselator, that, with a constant provision of inputs, it show limit cycles in factors and outputs.

Thematic codices: C62. C73.

Autocatálisis en el Juego Evolutivo
Un modelo de Producción con dinámicas complejas

Sergio Oscar Anchorena

pollo_mdp@yahoo.com

Facultad de Ciencias Económicas y Sociales, Universidad Nacional de Mar del Plata.

1. Introducción:

La teoría de los juegos evolutivos amplía el alcance de la teoría de juegos tradicional al estudio de equilibrio dinámico de una población de agentes dotados de determinadas estrategias, que se enfrentan en interacciones al azar y, obtienen su pago en términos de eficacia biológica. Esto es, el éxito de una estrategia se manifiesta en el número de copias cada tipo de agente que, dotadas de una determinada estrategia, jugarán el juego en la siguiente generación.

La estabilidad consiste en las llamadas Estrategias Evolutivamente Estables (EEE). Una estrategia evolutivamente estable se define como aquella con la propiedad de que, si la mayoría de los miembros de una población grande la adoptan, ninguna estrategia mutante podría invadir la población. "En otras palabras, una estrategia es estable, en sentido evolutivo, cuando no existe una estrategia mutante que dé una eficacia darwiniana superior a los individuos que la adoptan"(Maynard Smith, 1978, 1982).

En la teoría dinámica de los juegos evolutivos las propias estrategias son los jugadores, y los juegos se repiten dinámicamente en cada generación, así, la mayor o menor aptitud de una estrategia sobre otra, que determina la extinción de una de ellas, o bien hace posible la coexistencia, se ve representada en la composición de la población.

Esta estabilidad consiste en que, una vez alcanzada la composición de la población de equilibrio, ésta permanece estable, generación tras generación, y se corresponde a su vez con la EEE y no se modifica en ausencia de perturbaciones. Pero, en el caso de la aparición de una perturbación, esto es, la aparición de una estrategia mutante, la dinámica del sistema tiende a recuperar la composición de equilibrio.

En un trabajo anterior (Anchorena, 2009), se presentó una herramienta que permite modelar situaciones con inestabilidad intrínseca. Mediante una formalización que permite incluir externalidades, es decir, situaciones en las cuales el enfrentamiento entre dos agentes tiene consecuencias sobre un tercero, que no participa de la interacción.

En esta ocasión se incluirá otra relación, llamada autocatálisis social por Niklas Luhmann (1990, 1998). Basada en la autocatálisis química, por la cual un compuesto actúa como catalizador en su propia síntesis, Luhmann, considera que el orden de un sistema social es posible en la medida que exista una doble contingencia por la que entre muchas conductas posibles, son seleccionadas aquellas que resultan recíprocas. Según esto, la selección de una conducta de un agente entre muchas posibles, no se basa sólo en sus necesidades individuales, sino en la dependencia de la selección que hagan otros agentes, en relación con la satisfacción de estas necesidades, así, la conducta de un agente actúa como catalizador en el sentido de que, sin modificarse, modifica la acción del otro actor en la interacción. Cuando un determinado tipo de

acción o estrategia, a partir de la interacción, motiva la adopción de la misma por parte de otro agente, estamos en presencia de un fenómeno autocatalítico. “La autocatálisis de los sistemas sociales crea su propio catalizador, es decir, el problema mismo de la doble contingencia” que es la base del orden del sistema social (Luhmann, 1990, 1998).

En este trabajo se definen las relaciones de autocatálisis sobre la base de su origen en la química, se incluyen en el formalismo de los juegos evolutivos y se presenta un modelo de juego que simula un proceso productivo, que responde a las dinámicas del Bruselator de Prigogine y Lefever (Prigogine, 1980)

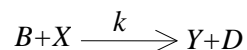
Para este objetivo se definen los bienes involucrados, clasificándolos en insumos, factores y productos, se analizan las transformaciones básicas que ocurren en el modelo, y se construye un sistema abierto de producción que se modela mediante un juego evolutivo con relaciones autocatalíticas. Pese a que los inputs o insumos permanecen constantes, las dinámicas del sistema incluyen desde el equilibrio puntual, similar a las EEE, hasta dinámicas de ciclo límite de modo determinista (Montero y Morán, 1992).

2. Reacciones, Catálisis, Autocatálisis y Producción:

El término catálisis, proviene del campo de la química, es un tipo particular de participación de una determinada sustancia en una reacción química.

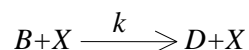
El análisis de las reacciones químicas se puede realizar desde un punto de vista cinético y termodinámico. La cinética química, que es la que nos va a ocupar en este apartado, estudia las velocidades de los cambios de concentración de las diferentes sustancias que intervienen en una reacción.

Desde el punto de vista cinético, la teoría clásica de la cinética química se basa en la suposición de que la velocidad de reacción es proporcional al producto de las concentraciones de los reactivos que intervienen en ella (Prigogine y Stengers, 1983). Una reacción química es un proceso de transformación que modifica las sustancias que participan de ella, así la reacción

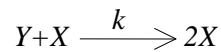


se lee, de la interacción de la sustancia B con la sustancia X , se obtienen las sustancias Y y D , con una velocidad k . Donde k se denomina constante cinética y da una idea de la eficiencia de la transformación, esto es, cuántas de las colisiones entre las moléculas de B y X , dan efectivamente como resultado Y y D .

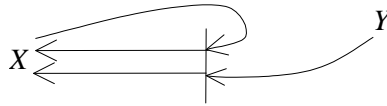
Cuando la velocidad de las reacciones químicas se ve afectada por la presencia de una sustancia química, además de la concentración de los reactivos participantes y los parámetros termodinámicos, esta sustancia recibe el nombre de catalizador. El catalizador no se modifica durante la reacción, sin embargo, su presencia favorece que la reacción se produzca. Una reacción similar a la anterior en la que X actúa como catalizador sería



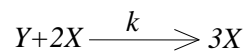
La autocatálisis es el caso de una sustancia actúa como catalizador para su propia síntesis. Es decir, para que el sistema produzca X , es necesaria la presencia de X .



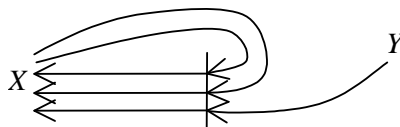
Estas reacciones se representan con un bucle:



Finalmente, cuando la velocidad de la reacción depende del cuadrado de la concentración del catalizador,



el bucle de reacción resulta:



Y la dinámica de transformación resulta de tipo no lineal.

Con respecto a las transformaciones que incluyen catalizadores, interesan en este trabajo, aquellas que son irreversibles, es decir, aquellas en las que cuando una sustancia se transformó a través de una reacción en otra, no es posible volver atrás esa transformación.

Nótese que en un sistema productivo ocurren transformaciones del mismo tipo que las descritas arriba.

Tal como en una reacción química, en la producción, es posible diferenciar entradas (inputs) insumos, factores que participan de la producción, y salidas (outputs), productos.

Dentro de los bienes que participan en la producción hay algunos que se transforman, los insumos, y otros, los factores productivos, cuya presencia es necesaria para producir otros bienes pero no se transforman ellos mismos durante el proceso de producción, esto es, en los términos definidos arriba, un efecto catalizador.

Dentro de los factores de la producción, los bienes de capital, cuando se utilizan para producir otros bienes de capital existiría, una relación de autocatálisis, la existencia de bienes de capital permite producir bienes de capital.

Finalmente, se acepta el supuesto de que los procesos productivos que transforman inputs en outputs son tecnológicamente irreversibles, es decir, no se pueden obtener insumos a partir de productos, en la misma cantidad que fueron utilizados para producirlos (Mas-Colell, 1995).

3. Catálisis y dinámicas de replicador

En este apartado se presentan las dinámicas de replicador autocatalítico, teniendo en cuenta que la concentración, en el caso de los procesos químicos se expresa en N^0 de

moles por cada litro, lo que las concentraciones pueden incluir valores mayores que la unidad.

Siguiendo la notación de Weibull (1996) se define un juego 2x2 (juego simétrico bi-personal) como un triplete $G = (I, S, \pi)$

Donde $I = \{A, B\}$ es el conjunto de dos jugadores

$S_A = S_B = K = \{s_1, \dots, s_m\}$; es un conjunto de m estrategias puras para cada jugador.

$S = S_A \times S_B$; es el espacio de estrategias puras, el producto cartesiano de los conjuntos de estrategias puras de cada jugador.

$\pi: S \rightarrow \mathbb{R}^m$ es la función de pagos para cada jugador, donde $\pi_A(s_i, s_j) = \pi_B(s_j, s_i)$ para todo $(s_i, s_j) \in S$.

Las funciones de pago se representan con una notación matricial, siendo $\pi_A = A$, y $\pi_B = B$, donde A y B son dos matrices de dimensión $m \times m$.

La matriz A , para cada enfrentamiento entre estrategias (i, j) , asigna el correspondiente pago $\pi(i, j) = a_{ij}$, el elemento de la fila i , y la columna j de la matriz A .

El requerimiento de simetría en la función de pagos es equivalente al requerimiento de que la matriz de pago B del segundo jugador sea la traspuesta de la matriz A que representa la función de pagos π_1 , del primero $B = A^T$.

$$\text{Sea } A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{mm} \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdot & \cdot & \cdot & b_{1m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{m1} & \cdot & \cdot & \cdot & b_{mm} \end{pmatrix}$$

Entonces $b_{ij} = a_{ji} \forall i, j = 1, \dots, m$

La dinámica de replicador autocatalítico consiste en suponer una población en un tiempo t , $P(t)$ donde el vector asociado al estado de la población es $Z(t) = (Z_1(t) \dots Z_i(t) \dots Z_m(t))$ que indica la concentración de cada estrategia, donde $Z_i(t)$ es la concentración en la población de individuos programados con la estrategia pura $s_i \in S$

en un instante t de un juego evolutivo, así $P(t) = \sum_{i=1}^m Z_i(t) > 0$.

A los fines de respetar las dinámicas químicas de la autocatálisis las concentraciones se miden en *moles/litro*.

El pago a una estrategia pura $i \in K$ es $u(e^i, z(t)) = e^i A Z(t)^T$ donde e^i es el vector que asigna 1 al componente i y 0 al resto de los $m-1$ componentes.

El pago promedio esperado para la población que juega con la estrategia pura i si el estado de la población es $Z(t)$, es designado como

$$u(Z_i(t), Z(t)) = Z_i(t) u(e^i, Z(t)) = Z_i(t) e^i A Z(t)^T \tag{1}$$

El pago promedio de la población, que es el promedio de cualquier individuo que se enfrenta con otro al azar, es

$$u(Z(t), Z(t)) = \sum_{i=1}^m u(Z_i(t), Z(t)) \tag{2}$$

Siendo β_i la tasa de nacimientos en ausencia de enfrentamientos y δ_i , la tasa de mortalidad para la estrategia i , la tasa de variación de la población que juega la estrategia i resulta:

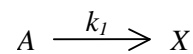
$$\Delta Z_i(t) = \beta_i + \left[u(Z_i(t), Z(t)) - u(Z(t), Z(t)) \frac{Z(t)_i}{P(t)} \right] - \delta_i \quad (3)$$

4. Las transformaciones en la producción

En este apartado se presentan las transformaciones que formarán parte del modelo, su representación y las dinámicas de replicador a ellas asociadas.

En la representación gráfica del sistema, el marco punteado separa los procesos internos de las entradas y las salidas.

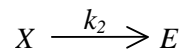
4.1. A partir de cada unidad del insumo A se obtiene una unidad del factor X con velocidad k_1 .



Estos son, en términos del juego, parte de los nacimientos de X en ausencia de enfrentamientos, y, por lo tanto:

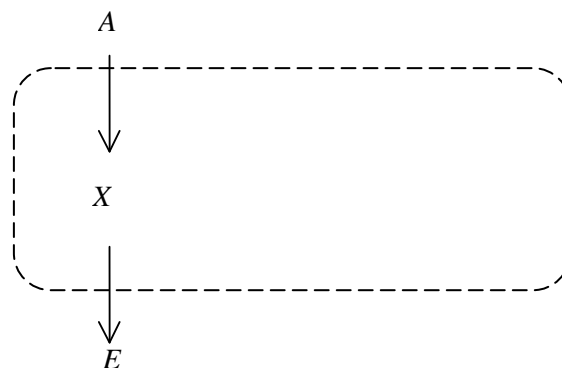
$$\Delta X(t) = \beta_X = k_1 \cdot A(t) = -\Delta A(t) \quad (4)$$

4.2. A partir de cada unidad del Factor X se obtiene una unidad del producto E con velocidad k_2 .

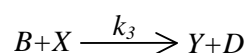


Estos son, en términos del juego, parte de las muertes en ausencia de enfrentamientos, y, por lo tanto:

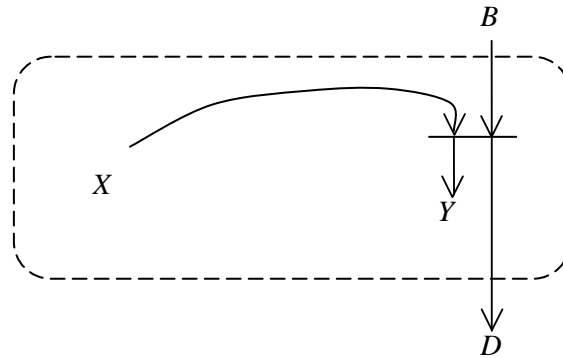
$$\Delta X(t) = \delta_{X1} = -k_2 \cdot X(t) = -\Delta E(t) \quad (5)$$



4.3. A partir de un insumo B y un factor X , se obtienen un factor Y , y un producto D con una velocidad k_3 .



Suponiendo que B se controla externamente, y D se retira del sistema, sólo interesa como cambian las concentraciones de X e Y .



Esto es en términos del juego, una tasa de mortalidad en ausencia de enfrentamientos para X , y una tasa de nacimientos para Y , y, por lo tanto:

$$\Delta X(t) = \delta_{X2} = k_3 \cdot B(t) \cdot X(t) - \beta_Y = -\Delta Y(t) \quad (6)$$

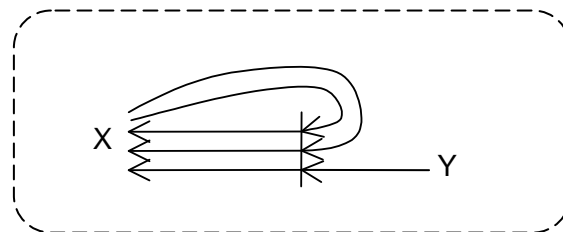
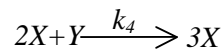
O bien

$$\Delta Y(t) = \beta_Y = -k_3 \cdot B(t) \cdot X(t) = -\Delta X(t) \quad (7)$$

Téngase en cuenta que:

$$\Delta D(t) = \Delta Y(t) \quad (8)$$

4.4. A partir de dos unidades del factor X y una unidad del factor Y , se obtienen 3 unidades de Factor X con una velocidad k_4 .



Aquí, las estrategias son X e Y , el vector bienes $Z=(X,Y)$, donde la matriz del juego resulta:

$$A = \begin{pmatrix} 1/X(t) & k_4 X(t) \\ -k_4 X(t) & 1/Y(t) \end{pmatrix}$$

Y, consecuentemente, aplicando (1) para X e Y

$$u(X(t), Z(t)) = X(t) \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/X(t) & +k_4 X(t) \\ -k_4 X(t) & 1/Y(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{pmatrix} = X(t) + k_4 X(t)^2 Y(t) \quad (9)$$

$$u(Y(t), Z(t)) = Y(t) \left(0 \quad 1 \right) \begin{pmatrix} 1/X(t) & +k_4 X(t) \\ -k_4 X(t) & 1/Y(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = Y(t) - k_4 X(t)^2 Y(t) \quad (10)$$

Por (2)

$$u(Z(t), Z(t)) = u(X(t), Z(t)) + u(Y(t), Z(t)) = X(t) + Y(t) = P(t) \quad (11)$$

Finalmente utilizando (3)

$$\Delta X(t) = \left[u(X(t), Z(t)) - u(Z(t), Z(t)) \frac{X(t)}{P(t)} \right] = +k_4 X(t)^2 Y(t) \quad (12)$$

$$\Delta Y(t) = \left[u(Y(t), Z(t)) - u(Z(t), Z(t)) \frac{Y(t)}{P(t)} \right] = -k_4 X(t)^2 Y(t) \quad (13)$$

Nótese que las variaciones de $X(t)$ y de $Y(t)$ corresponden a una función de tipo Cobb-Douglas.

5. El Modelo

El modelo presenta una cadena de producción en la que se utilizan dos insumos A y B , cuya provisión es constante, dos factores, X e Y , que se obtienen en el propio sistema productivo y dos bienes finales, D y E que salen del sistema.

Lo que se pretende es un juego que muestre dinámicas similares a las del sector industrial manufacturero, que, eliminado el efecto de la tendencia, presenta oscilaciones casi periódicas, siendo que la provisión de insumos desde fuera del sistema productivo (es decir, importados) resulta aproximadamente constante.

En el gráfico I se muestran con la series temporales de Producto del sector industrial manufacturero, y de los insumos importados (Bienes de capital, Bienes intermedios, Combustibles y lubricantes, Piezas y accesorios para bienes de capital) de Argentina, durante el período 2002-2008, eliminado el efecto de la tendencia en ambos casos.

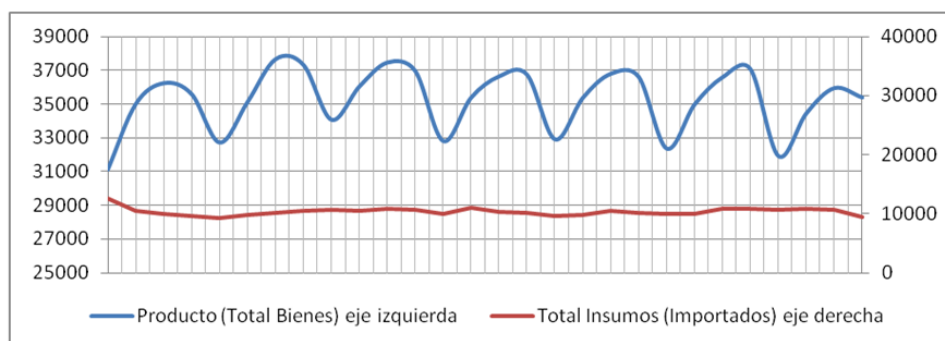
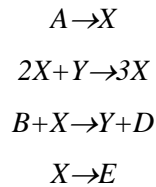
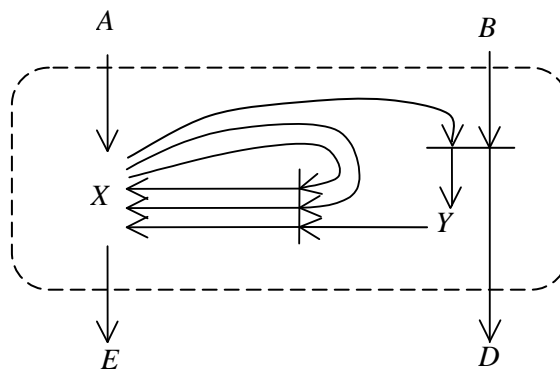


Gráfico I: Producto total sector industrial manufacturero, e Insumos Importados
Series trimestrales 2002-2008, libres de tendencia a valores constantes de 1993
Fuente: Elaboración propia sobre datos del INDEC

Para ello se recurre a un juego que replica las dinámicas del Bruselador, que es un modelo ideado por Prigogine y Lefever en el año 1968 (Montero y Morán, 1992, p: 139), para ejemplificar este tipo de sistemas. Las reacciones que definen al Bruselador (Prigogine y Stengers, 1983: p173) son:



Y se representan en la figura xx



En este modelo las cantidades de los insumos A y B son parámetros controlados desde el exterior del sistema (llamados parámetros de control), y permanecen constantes. Por lo tanto las variables dependientes del sistema son las concentraciones $X(t)$ e $Y(t)$. Al mismo tiempo, los productos E y D , son extraídos del sistema. Vale recordar que $\Delta E(t) = -k_2 X(t)$ y $\Delta D(t) = k_3 B X(t)$

La variación de las concentraciones en función del tiempo para X e Y , de acuerdo con lo desarrollado arriba está dada por la adición de las fórmulas (4), (5), (6) y (12) para X :

$$\Delta X(t) = \beta_X + \left[u(X(t), Z(t)) - u(Z(t), Z(t)) \frac{X(t)}{P(t)} \right] - \delta_{X1} - \delta_{X2} \tag{14}$$

$$\Delta X(t) = k_1 A + k_4 X(t)^2 Y(t) - k_2 X(t) - k_3 B X(t) \tag{15}$$

Y la adición de las fórmulas (7), y (13) para Y :

$$\Delta Y(t) = \beta_Y + \left[u(X(t), Z(t)) - u(Z(t), Z(t)) \frac{X(t)}{P(t)} \right] \tag{16}$$

$$\Delta Y(t) = k_3 B X(t) - k_4 X(t)^2 Y(t) \tag{17}$$

Si por simplicidad se suponen todas las k unitarias, igualando ambas ecuaciones a cero se obtienen las concentraciones del estado estacionario:

$$\begin{aligned}
 X^* &= A \\
 Y^* &= B/A
 \end{aligned}$$

Aunque este modelo no representa, en principio, ningún caso real ha sido utilizado para simular distintos tipos de procesos de producción en el caso de la Biología, como es el caso del metabolismo celular (Montero y Morán, 1992). El interés de este modelo está en que para ciertos valores de los parámetros de control A y B , valores llamados “umbral crítico”, los valores de X e Y (y, consecuentemente, de D y E) comienzan a presentar oscilaciones periódicas (Nicolis y Prigogine, 1977, Prigogine y Stengers, 1983, McDowell y Powers, 2008.).

6. La estabilidad del sistema

Como se dijo, el estado estacionario, esto es, el equilibrio en el sentido de un punto fijo, en el cual es al las cantidades de $Z^*=(X^*,Y^*)=(A,B/A)$ permanecen constantes no es garantía de estabilidad.

Para analizar la estabilidad de este equilibrio se analiza la función de producción en el entorno de Z^* , haciendo

$$F(X,Y)=(F_X(X,Y), F_Y(X,Y))$$

Dónde

$$F_X(X,Y)=\Delta X = A + X^2Y - BX - X \quad (18)$$

$$F_Y(X,Y)=\Delta Y = -X^2Y + BX \quad (19)$$

Siendo h un número pequeño, entonces, el cambio en el resultado de la función en Z^*+h comparado con el resultado para Z^* es bien aproximado por el mapa lineal $F(Z^*+h)-F(Z^*)=DF(Z^*).h$, donde $DF(Z^*).h$ es la matriz Jacobiana de F en Z^* , siendo el error en la aproximación proporcional a h^2 para un ínfimo h y, por lo tanto, despreciable (Goodwin, 1990, McDowell y Powers, 2008).

$$DF(Z^*) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_X}{\partial X}(Z^*) & \frac{\partial F_X}{\partial Y}(Z^*) \\ \frac{\partial F_Y}{\partial X}(Z^*) & \frac{\partial F_Y}{\partial Y}(Z^*) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B-1 & A^2 \\ -B & -A^2 \end{pmatrix} \quad (20)$$

Para analizar la estabilidad del equilibrio se analizan la traza y el determinante.

$$\tau = \text{Traza}(DF(Z^*)) = B - A^2 - 1 \quad (21)$$

$$\Delta = \text{Det}(DF(Z^*)) = A^2 \quad (22)$$

Siendo los autovalores $\lambda_{1,2} = \frac{-\tau \pm \sqrt{\tau^2 - 4\Delta}}{2}$

$\Delta > 0$, ya que $A^2 > 0$, lo que implica que $Z^*=(A,B/A)$ no es un punto de ensilladura o silla de montar. Si $B < 1 + A^2$, entonces $\tau < 0$, y el punto de equilibrio es un atractor, pero, si $B > 1 + A^2$, entonces $\tau > 0$, y el punto de equilibrio es un repulsor, y, por lo tanto el equilibrio es inestable (Strogatz, 1994, pp. 136-137).

La parte imaginaria de los autovalores resulta

$$\pm \frac{\sqrt{\tau^2 - 4\Delta}}{2} \quad (23)$$

Ahora bien, si $B-A^2-I=0$, entonces $B=I+A^2$ y la parte imaginaria de los autovalores es distinta de cero, entonces $Z^*=(A,B/A)$, es un centro y las trayectorias rodean al punto crítico sin acercarse o alejarse. (McDowell & Powers, 2008). Para que la parte imaginaria sea distinta de cero $\tau^2-4\Delta^2 < 0 \Rightarrow \tau^2 < 4\Delta^2 \Rightarrow (I-A)^2 < B < (I+A)^2$, siendo $B=I+A^2$ esta condición se cumple siempre para $A>0$.

7. Algunos ejemplos de dinámicas

Para valores de inputs $B=1$ y $A=0.4$, $B<I+A^2$ y partiendo del entorno de $Z^*=(0.4,2.5)$ el sistema alcanza el equilibrio, como se muestra en la figura 1.

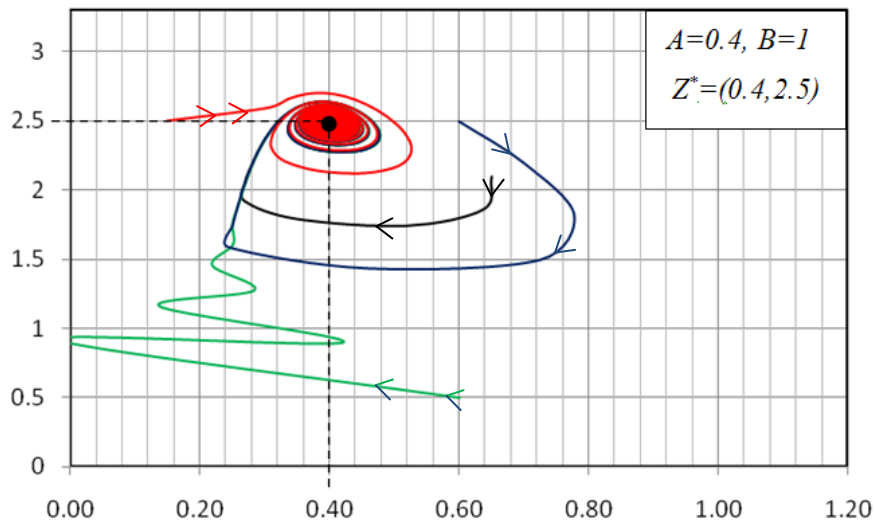


Figura 1: algunos senderos al equilibrio para $B=1$ y $A=0.4$

Para valores de inputs $B=1.16$ y $A=0.4$, $B=I+A/2$ y partiendo del entorno de $Z^*=(0.4,2.9)$ el sistema alcanza órbitas que constituyen un atractor alrededor de Z^* , como se muestra en la figura 2..

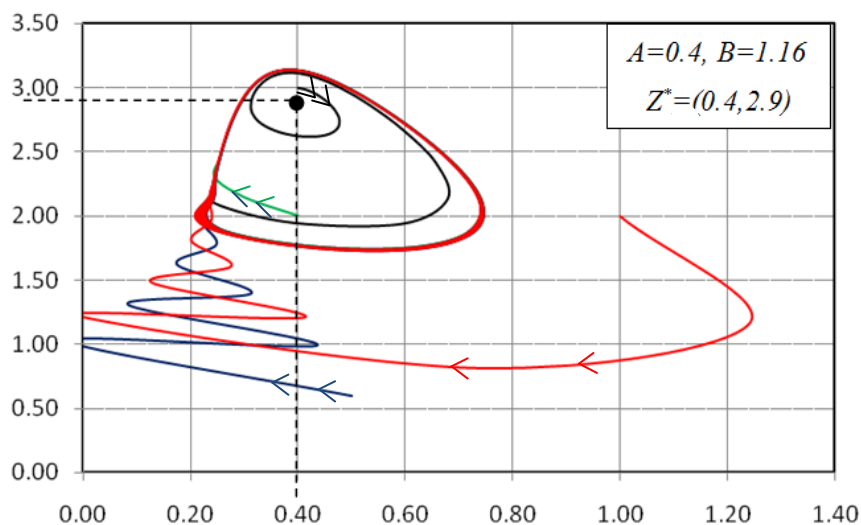
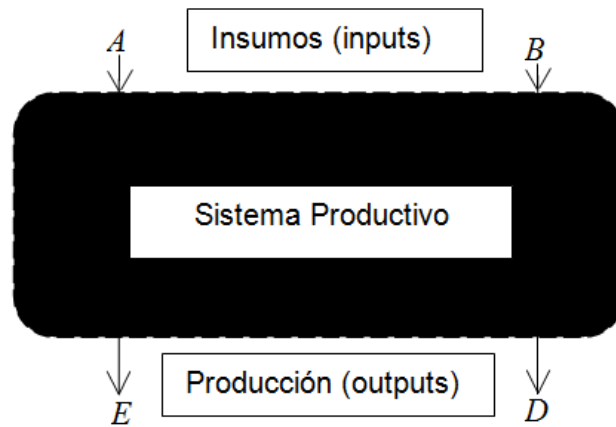


Figura 2: Ciclo límite, atractor para $B=1.16$ y $A=0.4$

Analizando el sistema como una caja negra, esto es, las series temporales de entradas y salidas, y suponiendo precios unitarios, para simplificar, puede calcularse la serie temporal del producto, esto es, producción menos insumos $P = (D+E)-(A+B)$.



En el gráfico II, se presentan las series temporales para de inputs $B=1.25$ y $A=0.5$, $B=1+A/2$, del producto es valor bruto de la producción-valor de los insumos suponiendo todos los precios unitarios. Tanto la dinámica del el producto $= (D+E)-(A+B)$ como de los insumos $= (A+B)$ del gráfico II guardan una similitud, cuanto menos cualitativa, con la series temporales de Producto de la industria manufacturera, y de insumos importados presentadas en el gráfico I.

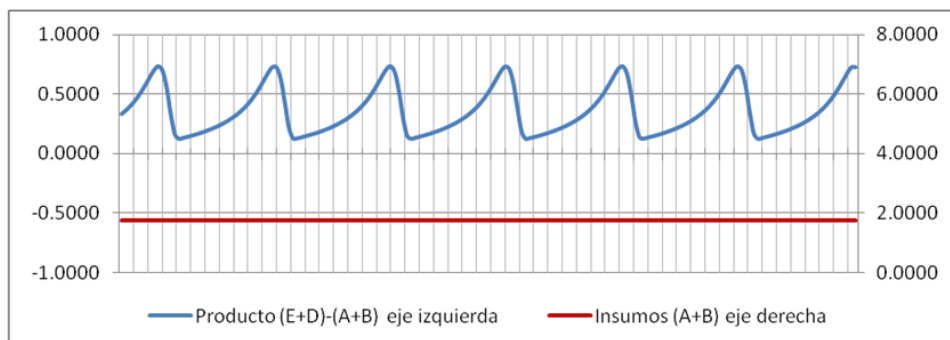


Gráfico II: Producto total del modelo $(D+E)-(A+B)$ e insumos $(A+B)$ a precios unitarios
Fuente: Simulación

8. A modo de conclusión

En este trabajo se ha presentado un refinamiento de los juegos bipersonales, que, además de permitir modelar todos los juegos clásicos, permite ampliar el alcance al modelado de juegos que incluyen relaciones autocatalíticas al incluir los efectos posibles de la concentración de una estrategia sobre el valor de sus pagos el juego.

Se ha presentado un ejemplo sencillo de un juego 2x2, que representa un sistema productivo, que incluye relaciones de autocatálisis y se ha mostrado cómo el mismo, presenta dinámicas que pueden ir desde el equilibrio estable, hasta los ciclos límites vinculados a atractores, dinámica en la cual coexisten las dos estrategias, no se llega nunca al equilibrio, presentando la composición de la población ciclos periódicos y regulares.

El modelo, pese a su simplicidad, arroja series temporales que guardan semejanza cualitativa con las series temporales reales de insumos y producto de un sistema económico real, una vez eliminado el efecto de la tendencia de este último.

Si bien por simplicidad se han supuesto todos los valores de $k_i=1$, alterándolos, así como también alterando los valores de los parámetros de control, pueden lograrse series que tengan mayor similitud con las de los casos reales.

10. Bibliografía:

Anchorena, S., 2009. "Externalidades en el Juego Evolutivo. Un modelo de juego simple con dinámicas muy complicadas", en actas de la XLIV Reunión Anual de la Asociación Argentina de Economía Política.

Goodwin, R., 1990. Chaotic Economic Dynamics. Oxford University Press, Oxford.

Luhmann, N., 1990, Sociedad y Sistema: La Ambición de la Teoría, Paidós, Barcelona

Luhmann, N., 1998, Sistemas Sociales. Lineamientos para una teoría general. Anthopos-Universidad Iberoamericana-CEJA. Bogotá. Colombia.

Mas-Colell, A., M. Whinston & J. Green, 1995, Microeconomic Theory. Oxford University Press.

Maynard Smith, J., 1978. The evolution of behaviour. Scientific American 239: 176-91.

Maynard Smith, J., 1982. Evolution and Theory of Games. Cambridge University Press. Cambridge MA.

McDowell, M. & Powers, J., 2008. Mathematical Modeling of the Brusselator, Department of Aerospace and Mechanical Engineering University of Notre Dame, AME 36099-01, Notre Dame, Indiana

Montero, F. y Morán, F., 1992. Biofísica: procesos de autoorganización en biología. Eudema, Madrid.

Nicolis, G. & Prigogine, I., 1977. Self-Organization in Nonequilibrium Systems. New York: John Wiley and Sons.

Prigogine, I., 1980. From Being to Becoming: Time and Complexity in the Physical Sciences. San Francisco: W. H. Freeman.

Solé, R. and Manrubia, S., 1996. Orden y caos en sistemas complejos. Universidad Politécnica de Cataluña, Barcelona.

Strogatz, Steven H., 1994. Nonlinear Dynamics and Chaos, Westview Press,

Weibull, J., 1996. Evolutionary Game Theory. MIT Press. Cambridge, MA.