**EL ANÁLISIS DE INVERSIONES A TRAVÉS DEL PLAZO FINANCIERO MEDIO Y LA TASA CONTINUA**

**Autores:**

**Paulino Eugenio MALLO**
**María Antonia ARTOLA**
**Mariano MORETTINI**

Centro de Investigaciones Contables de la Facultad de Ciencias Económicas y Sociales de la Universidad Nacional de Mar del Plata

paulinomallo@speedy.com.ar; martola@infovia.com.ar; mariano.morettini@gmail.com

# EL ANÁLISIS DE INVERSIONES A TRAVÉS DEL PLAZO FINANCIERO MEDIO Y LA TASA CONTINUA


## RESUMEN

Como parte de un cuerpo docente, año a año a medida que se van dictando los temas de la asignatura, en varios de ellos nos preguntamos: ¿para qué enseñamos este concepto?, si simplemente trabajando matemáticamente con las definiciones de capitalización o actualización surge la respuesta sin necesidad de darle un nombre específico y acompañarla de una demostración analítica.

Entre esos temas, siempre tenemos presente el "tiempo medio" y la "tasa de capitalización continua", y leyendo los textos de Alfonso Rodríguez, catedrático de la Universidad de Barcelona, nos encontramos con un interesante uso de ambos conceptos aplicados al análisis de operaciones de inversión.

Por ese motivo, mediante el presente trabajo, queremos compartir con ustedes la utilidad que este autor ofrece de estos dos conceptos financieros para ayudar a concientizarnos que todo lo que aportamos a los alumnos de nuestro conocimiento específico de una asignatura es útil, para formarlos con una capacidad crítica y comprensiva hacia su futuro desenvolvimiento profesional. Desarrollaremos la presentación mediante un simple ejemplo que intentará demostrar su utilidad en contextos de certeza, analizando si se puede enriquecer el mismo para contextos inciertos.


## INTRODUCCIÓN

En nuestra cátedra el dictado de Matemática Financiera, generalmente comienza con la exposición de algunos términos específicos, que implican para el alumno la lectura de un breve módulo titulado "Algunas referencias bibliográficas", entre los que se desarrollan, además del concepto de la asignatura, los siguientes:

- qué es una operación financiera y cuáles son sus características,
- qué es una ley financiera,
- qué se entiende por equivalencia financiera,
- cuál es la diferencia entre interés y tasa de interés, su justificación,
- qué son los regímenes de capitalización y
- qué se entiende por tasas equivalentes.

Una vez que se intenta la comprensión de estos términos por parte de los alumnos, se sigue profundizando su conceptualización a través del desarrollo de los contenidos, por considerarlos básicos y sobre los que se sustenta absolutamente todo el conocimiento que se irá generando a lo largo de toda la materia.

En este punto, se los induce a leer un segundo módulo, titulado "Revisión de temas introductorios a Matemática Financiera", que además de tener un recordatorio importante de herramientas matemáticas, que por supuesto se dan por conocimiento adquirido, pero seguramente "olvidado", se los introduce en las primeras herramientas propias, que implican algunas demostraciones analíticas que tienen como fin metodizar una línea de pensamiento, es decir que ante un olvido de una "fórmula" puedan efectuar el desarrollo y obtener una expresión final que sea de utilidad para resolver un problema concreto.

Dentro de esos primeros temas tenemos:

- Determinación del monto a interés simple y compuesto, analítica y gráficamente
- Aplicaciones concretas en ambos regímenes:

- tasa media,
- tiempo medio,
- tiempo necesario para que un capital se convierta en múltiplo de sí mismo y
- tiempo necesario para que dos capitales diferentes colocados a diferentes tasas produzcan el mismo monto.

A partir de ese momento se sigue progresando en los contenidos, agregando nuevas herramientas propias de nuestra Matemática Financiera, como son las tasas, las operaciones simples de descuento, las operaciones complejas, sus aplicaciones al reembolso de préstamos, etc.

## DEFINICIÓN DE LOS TEMAS: PLAZO MEDIO Y TASA CONTINUA

## PLAZO MEDIO FINANCIERO

El primero de los temas que nos preguntamos: ¿para qué lo seguimos dando?, es *tiempo medio,* si simplemente planteando una situación original y una opción, que financieramente son equivalentes, se soluciona el tema planteado, pero sin importar este interrogante lo seguimos tratando.

A continuación se presenta la propuesta de desarrollo temático, que consta de una explicación analítica en la clase teórica, que también se encuentra desarrollada en el módulo respectivo, finalizando con la aplicación a casos prácticos mediante la intervención de los ayudantes de cátedra.

### 1. Concepto de *tiempo medio*:

El módulo, definiéndolo, dice: "*Dada una serie de capitales colocados a* ***diferentes tiempos*** *pero todos a una* ***misma tasa****, determinar a qué* ***tiempo medio*** *o único (o promedio) deberán estar invertidos para que con la misma tasa, produzcan los mismo intereses*".

Al respecto qué encontramos en nuestra bibliografía básica:

> *Murioni y Trossero*, en su obra solamente tratan el tema considerando tasa media y nos introducen en este concepto bajo las operaciones de Equivalencia de capitales, mediante los títulos "vencimiento común y medio (como caso particular del primero)", definiéndolo de la siguiente manera:
> *"Sean varios capitales* $C_1, C_2, C_3, \ldots, C_k$*, disponibles dentro de* $n_1, n_2, n_3, \ldots, n_k$ *días y deseamos sustituirlos por un solo capital* $C$*, con vencimiento dentro de* $n$ *días, deberá verificarse que:*
> $$C_1\left(1-\frac{n_1}{\Delta}\right)+C_2\left(1-\frac{n_2}{\Delta}\right)C_3\left(1-\frac{n_3}{\Delta}\right)+\cdots+C_k\left(1-\frac{n_k}{\Delta}\right)=C\left(1-\frac{n}{\Delta}\right)$$
> *siendo* $i$ *o* $d$ *la tasa y* $\Delta$ *el divisor fijo correspondiente."*
> Si bien este planteo está expresado para interés simple, se repite más adelante en su obra el mismo desarrollo para interés compuesto, denominando al concepto como *duración media*.[1]
>
> *Gianneschi,* en su libro no hace mención a estos temas dentro de las operaciones de capitalización sino que también plantea la problemática en el capítulo 5 dedicado a equivalencia de capitales, también plantea las dos

[1] Temas tratados a partir de las páginas 50 y 130, respectivamente del *"Tratado de cálculo financiero"*.

operaciones básicas: “vencimiento común y medio”, y los define como: *“Los dos problemas consisten en reemplazar varios documentos por uno solo”,* además en párrafos siguientes establece: *“Por el principio de equidad, el valor actual del nuevo documento debe ser igual a la suma de los valores actuales de los documentos dados ...”.*[2]

*Yasukawa,* tampoco desarrolla el tema de manera particularizada e incorpora el concepto en el capítulo VII de su texto, en el apartado titulado “Documentos equivalentes”, definiéndolos como: *“Documentos equivalentes son aquellos que a una misma fecha tienen los mismos valores actuales o efectivos”.* Desarrolla los conceptos de “vencimiento común y medio”, estableciendo, en función de su definición original, que pueden existir diferentes consideraciones a tratar con respecto a los documentos:

1. *... tener iguales o distintos valore nominales*
2. *... tener iguales o distintas fechas de vencimiento*
3. *... ser actualizados con una sola tasa o distintas tasas de interés o descuento*
4. *... ser actualizados con el mismo o distintos tipos de descuento*[3]

## 2. Demostración analítica:

Lo que se ofrece a los alumnos son las siguientes demostraciones:

***Condiciones generales del modelo a <u>interés simple</u>: varios capitales, varios plazos, única tasa***

*Un capital:* $C_1$ *colocado durante un tiempo:* $n_1$ *a la tasa* $i$*, produce:* $I_1 = C_1 \cdot n_1 \cdot i$

*Un capital:* $C_2$ *colocado durante un tiempo:* $n_2$ *a la tasa* $i$*, produce:* $I_2 = C_2 \cdot n_2 \cdot i$

*Un capital:* $C_3$ *colocado durante un tiempo:* $n_3$ *a la tasa* $i$*, produce:* $I_3 = C_3 \cdot n_3 \cdot i$

$\vdots$

*Un capital:* $C_t$ *colocado durante un tiempo:* $n_t$ *a la tasa* $i$*, produce:* $I_t = C_t \cdot n_t \cdot i$

***Se busca que la operación equivalente produzca el mismo interés total, entonces:***

*Se suman los intereses parciales:* $\sum_{x=1}^{t} I_x = \sum_{x=1}^{t} C_x \cdot n_x \cdot i$ *y*

***Se determina para qué plazo único se mantienen los mimos intereses totales:***

$$\sum_{x=1}^{t} C_x \cdot n \cdot i = \sum_{x=1}^{t} C_x \cdot n_x \cdot i$$

***Operando matemáticamente se obtiene el tiempo medio:***

$$n \cdot \cancel{i} \sum_{x=1}^{t} C_x = \cancel{i} \sum_{x=1}^{t} C_x \cdot n_x \Rightarrow \boxed{n = \frac{\sum_{x=1}^{t} C_x \cdot n_x}{\sum_{x=1}^{t} C_x}}$$

Al finalizar se aclara que la misma demostración se puede plantear a partir de la determinación de los montos, no de los intereses totales, por supuesto arribando a la misma expresión.

[2] Tema desarrollado a partir de la página 101 de su libro *“Matemática Financiera*”.
[3] A partir de la página 205 de su libro *“Matemática Financiera”*.

También se desarrolla el mismo concepto considerando las:

***Condiciones generales del modelo a <u>interés compuesto</u>: varios capitales, varios plazos, única tasa***

*Un capital:* $C_{0_1}$ *colocado durante un tiempo:* $n_1$ *a la tasa* $i$*, origina:* $C_{n_1} = C_{0_1}\left(1+i\right)^{n_1}$

*Un capital:* $C_{0_2}$ *colocado durante un tiempo:* $n_2$ *a la tasa* $i$*, origina:* $C_{n_2} = C_{0_2}\left(1+i\right)^{n_2}$

*Un capital:* $C_{0_3}$ *colocado durante un tiempo:* $n_3$ *a la tasa* $i$*, origina:* $C_{n_3} = C_{0_3}\left(1+i\right)^{n_3}$

$\vdots$

*Un capital:* $C_{0_t}$ *colocado durante un tiempo:* $n_t$ *a la tasa* $i$*, produce:* $C_{n_t} = C_{0_t}\left(1+i\right)^{n_t}$

***Se busca que la operación equivalente produzca el mismo interés total, entonces:***

*Se suman los montos parciales:* $\sum_{x=1}^{t} C_{n_x} = \sum_{x=1}^{t} C_{0_x}\left(1+i\right)^{n_x}$ *y*

***Se determina para qué plazo único se mantiene el mismo monto total:***

$$\sum_{x=1}^{t} C_{0_x}\left(1+i\right)^{n} = \sum_{x=1}^{t} C_{0_x}\left(1+i\right)^{n_x}$$

***Operando matemáticamente se obtiene el tiempo medio:***

$$\log\sum_{x=1}^{t} C_{0_x} + n\cdot\log\left(1+i\right) = \log\left[\sum_{x=1}^{t} C_{0_x}\left(1+i\right)^{n_x}\right] \Rightarrow \boxed{n = \frac{\log\left[\sum_{x=1}^{t} C_{0_x}\left(1+i\right)^{n_x}\right] - \log\sum_{x=1}^{t} C_{0_x}}{\log\left(1+i\right)}}$$

Más adelante del dictado de los temas, sin tanta profundidad, es decir haciendo referencia a estos desarrollos teóricos previos y, sugiriendo la lectura de un tercer módulo titulado: "Descuento", se introducen los conceptos de "vencimiento común y medio", como operaciones de Equivalencia de capitales regidas por el siguiente enunciado:

*"Dos o más capitales distintos son equivalentes cuando, valuados todos a un mismo momento de referencia, con la misma ley financiera y a la misma tasa de interés, sus respectivos valores actuales son iguales".*

Siempre se hace referencia a la condición de equivalencia financiera que rige el canje de documentos, base de toda demostración analítica y de resolución de casos prácticos mediante la expresión: $\boxed{V = \sum_{x=1}^{t} V_x}$.

Del análisis de la expresión de equivalencia y, utilizando los diferentes sistemas de descuento de intereses, se obtienen las siguientes expresiones finales, con referencia exclusiva al tema que nos ocupa, *tiempo medio*:

- Vencimiento común con descuento comercial: $\boxed{n = \frac{N - \sum_{x=1}^{t} N_x\left(1-d\cdot n_x\right)}{N\cdot d}}$, *donde* $N$ *es dato*

- Vencimiento medio con descuento comercial: $\boxed{n = \frac{\sum_{x=1}^{t} N_x \cdot n_x}{N}}$, *recordando que la diferencia con el anterior es que* $N = \sum_{x=1}^{t} N_x$
- Vencimiento común con descuento compuesto, para el cual se puede utilizar cualquier tasa equivalente: $\boxed{n = \frac{\log N - \log\left[\sum_{x=1}^{t} N_x \left(1+i\right)^{-n_x}\right]}{\log\left(1+i\right)}}$, *definiendo a* $N$
- Vencimiento medio con descuento compuesto: $\boxed{n = \frac{\log\left[\sum_{x=1}^{t} N_x\right] - \log\left[\sum_{x=1}^{t} N_x \left(1+i\right)^{-n_x}\right]}{\log\left(1+i\right)}}$, *siempre considerando que* $N = \sum_{x=1}^{t} N_x$

## TASA CONTINUA

El segundo de los temas que íbamos a considerar, preguntándonos sobre la necesidad de su desarrollo, es *tasa continua*, en este caso por considerarlo un tema totalmente teórico sin muchas aplicaciones prácticas.

### 1. Concepto de *tasa continua o instantánea*:

Simplemente les decimos a los alumnos que esta tasa es la única que se establece para un régimen de capitalización de intereses de manera continua, es decir que su frecuencia de capitalización tiende a infinito.

Al respecto analicemos que dicen nuestros maestros sobre el tema:

> *Murioni y Trossero*, en su obra no la definen, sino que a partir del análisis de la tasa nominal, a la que no consideran una verdadera tasa sino una intensidad o coeficiente de comparación, para el caso particular que la frecuencia de capitalización tienda a infinito, o lo que es lo mismo, el período de capitalización tiende a cero, establecen una tasa nominal instantánea, que en simbología sería: $j_{(\infty)}$, por supuesto analizándola analíticamente. [4]
>
> *Gianneschi,* en su libro define a la *tasa instantánea* como *"… aquella que, aplicada a un régimen de capitalización continua produce, para un mismo capital y en el mismo tiempo, el mismo monto que la tasa nominal con capitalización periódica*", comparándolas luego analíticamente.[5]
>
> *Yasukawa,* comienza el tema diciendo *"… que el crecimiento real del interés es continuo, es decir, que se va produciendo en cada instante de tiempo y no en forma brusca. Es decir, que capitalización continua es lo mismo o sinónimo de capitalización instantánea",* más adelante establece: *"Esta tasa nominal que*

[4] Temas tratados a partir de la página 70 del *"Tratado de cálculo financiero"*.
[5] Tema desarrollado a partir de la página 134 de su libro *"Matemática Financiera*".

*podemos simbolizar como* $i^{(\infty)}$, *significando con ello que el período al que corresponde habrá que dividirlo en infinitas partes, capitalizando los intereses a su vez con la infinitesimal parte de ella, será entonces* *<u>la tasa periódica nominal con capitalización instantánea</u>* *y la representamos por* $\delta$ *(delta). Tal denominación proviene de lo siguiente: la tasa producirá el crecimiento del interés en un* *<u>infinitésimo de tiempo</u>*, *es decir,* *<u>en un instante</u>* *y por lo tanto su capitalización es instantánea. Por comodidad y en forma abreviada se la llama* *<u>tasa instantánea de interés</u>”*, por supuesto luego sigue con su análisis.[6]

## 2. Demostración analítica:

El tema de tasas generalmente se comienza con la presentación de todas las que se van a utilizar en el curso y la forma más simple es presentarlas mediante el siguiente cuadro:

| | **Vencidas** | **Adelantadas** |
|---|---|---|
| **Nominales** | $j_m$ | $f_m$ |
| **Efectivas** | $i$ | $d$ |
| **Equivalentes** | $i_m$ | $d_m$ |
| **Continua** | $\delta$ | |

A continuación y mediante un simple ejercicio numérico de capitalización de un peso, en un año como período de tiempo y con una capitalización intermedia de intereses a los seis meses a un determinado interés, por ejemplo del 20% anual, se demuestra la relación que tienen las tasas vencidas entre sí, en simbología sería: $(1+i)=\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^m=(1+i_m)^m$, considerando que $n=1$.

Utilizando el mismo ejemplo, donde ahora el peso es futuro, se descuentan los intereses también considerando una capitalización a mitad de período, se logra comparar las tasas adelantadas de la siguiente manera: $(1-d)=\left(1-\frac{f_m}{m}\right)^m=(1-d_m)^m$.

Finalmente analizando donde está el peso en cada una de estas operaciones planteadas en los incisos anteriores, se relacionan las tasas efectivas, vencida y adelantada, obteniéndose la siguiente expresión: $(1+i)=(1-d)^{-1}$, con lo cual las seis tasas se consideran equivalentes en un período de tiempo mediante la siguiente fórmula:

$$\boxed{(1+i)=\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^m=(1+i_m)^m=(1-d)^{-1}=\left(1-\frac{f_m}{m}\right)^{-m}=(1-d_m)^{-m}}$$

¿Qué pasa con la tasa instantánea o continua?, está fuera en el cuadro, está fuera en esta presentación de las tasas, ¿cómo la incorporamos a las relaciones de equivalencia?

La respuesta es mediante una demostración analítica, que nada gusta a los alumnos, por suponer que es una tasa “teórica” que no tiene uso en el mercado donde se van a desarrollar las operaciones financieras, de las cuales se busca que el estudiante sea capaz

[6] A partir de la página 124 de su libro *“Matemática Financiera”*.

de identificarlas, plantearlas y resolverlas en su futuro desempeño profesional, incluso particular.

La demostración que se les ofrece, con sus posibles variantes, entiendo que es conocida por todos, no tiene sentido presentarla en este trabajo. La misma parte de considerar que $m \to \infty$ y que el $\lim_{m \to \infty} j_m = \delta$, por lo tanto la tasa efectiva vencida es equivalente a la continua de la siguiente manera: $(1+i) = e^{\delta}$ y por transición es equivalente al resto de las tasas vistas.

No obstante lo dicho, la llamada tasa instantánea tiene varias aplicaciones en el campo contable. Así por ejemplo, si se quisiera medir la utilidad de una empresa en un cierto período a través de una tasa, la tasa instantánea sería la ideal pues las utilidades no se generan a "saltos" sino en forma continua, es decir, a cada instante.

## ANÁLISIS FINANCIERO A TRAVÉS DEL PLAZO MEDIO Y DE LA TASA CONTINUA

Del análisis de la obra del catedrático Alfonso Rodríguez (Universidad de Barcelona), reflejada en dos textos, "*Matemática de la financiación*" e "*Inmunidad Financiera*", surge que trabaja con conceptos tales como: preferencias, rendimientos o rentabilidades, que las considera el mejor reemplazo de la *TIR* (por estimar que ésta tiene algunos errores conceptuales al establecer que no mide rentabilidad).

Para este autor el uso de la *TIR* induce a una confusión conceptual entre rendimiento e interés, considerando que aquellos que la utilizan dan a esta herramienta la finalidad de ser una medida de rentabilidad, cuando realmente tiene el carácter de interés implícito, que contiene la acumulación propia de régimen de capitalización compuesto. Fundamenta su postura estableciendo las siguientes diferencias:

- ✓ El interés es un precio que el mercado da al dinero en retribución de liquidez cedida, se define en condiciones de equilibrio de manera externa y exógena a la inversión, siempre toma valores positivos.
- ✓ El rendimiento, por el contrario, es una magnitud interna a la inversión que se fija en condiciones de desequilibrio, por lo tanto su naturaleza es endógena y marginal, puede tomar valores positivos o negativos.

### 1. Conceptos básicos

En este apartado se expresarán algunas definiciones utilizadas por el autor para comprender su postura:

- Los **conceptos elementales**, significan cómo define algunos términos
  - el campo discreto está formado por los *CAPITALES*
  - el campo continuo está compuesto por los *FLUJOS*

- Las **operaciones financieras**, clasificadas en:
  - **de financiación - *OFF***, generalmente contractuales donde la diferencia entre los dos conjuntos de capitales o flujos, *input* y *output*, es el interés, entendido como precio de satisfacción por el ahorro o costo financiero de la liquidez, es decir es el precio por utilizar cierto capital en el tiempo, lo que forma un valor agregado a los productos o bienes consumidos.

En estas operaciones *"… el sujeto activo o financiante facilita al pasivo o financiado la capacidad adquisitiva y liquidez que le son necesarias para la ejecución de un plan* *económico, sea de consumo o de producción. Con ello, el sujeto activo no asume titularidad alguna en tal plan económico, sino que se limita a colaborar en él, haciéndolo factible mediante la prestación del servicio financiero… Se configura así el **interés** como el precio de un servicio y, a la vez, como retribución al ahorro que lo permite, por lo que adquiere la naturaleza económica de renta, la **renta del ahorro…**”*.[7]

En simbología → $\left\{\left(C_r, T_r\right)\right\} \sim \left\{\left(C_s^{'}, T_s^{'}\right)\right\}$, representa la equivalencia financiera.

- **de inversión - *OFI***, dependen de un análisis marginal, es decir pretenden un rendimiento marginal excedente (que supere el costo). No se someten a las leyes de mercado, pero son su referencia para valorar el desequilibrio marginal.

En éstas *“… el sujeto participa activamente en el plan económico, compartiendo o asumiendo íntegramente la titularidad”*, es decir *“… la renta del inversor se distingue siempre de la renta del ahorro por su carácter diferencial o marginal, no siendo ya la retribución a un factor, sino el premio al acierto del plan inversor y la compensación por su riesgo”*.[8]

En simbología → $\left\{\left(C_r, T_r\right)\right\} \not\sim \left\{\left(C_s^{'}, T_s^{'}\right)\right\}$, representa el desequilibrio.

La importancia de este análisis reside en la *necesidad* de reconocer el efecto, de refinanciación o de reinversión, producido por el mantenimiento o incorporación de intereses o rendimientos devengados (no exigibles).

Esto conlleva a un análisis dinámico-continuo, que no debe confundirse con la noción de capitalización continua, e implica definir el concepto de ***plazo medio*** para operaciones complejas, y de esta forma establecer adecuadamente rendimientos relativos.

En lo pertinente a las *operaciones financieras de inversión*, podemos identificar dos características:

- ✓ la **inmovilización**, explica el esfuerzo del inversor, mediante la determinación de rendimientos brutos, netos, relativos, y
- ✓ el **rendimiento**, es el resultado del esfuerzo.

El análisis financiero se fundamenta en la existencia de valuar la liquidez que surge de un diferimiento en la disponibilidad de un capital, ya sea mediante la determinación de grados de preferencia o de su valoración propiamente dicha.

La postura convencional actual prescinde de la *inmovilización*, surgiendo de esta manera la aplicación de una herramienta muy poderosa conocida con el nombre de *valor actual neto (VAN)*, que representa el análisis del rendimiento absoluto de un flujo futuro de ingresos, frente a una inversión actual.

Los seguidores del concepto *inmovilización* consideran que las inversiones se ven afectadas por la dispersión, o *volatilidad*, de las tasas de interés, buscando un efecto inmunizatorio de tal afectación.

Está sustentado en la Teoría de la inmunización financiera, utilizada en la formación de una cartera de títulos cuyo valor no se ve afectado por los cambios en los tipos de interés, existirán menores riesgos cuando los tipos de interés están más concentrados o menos dispersos.

Otra herramienta utilizada en el análisis tradicional, es la *TIR*, que desconoce el desequilibrio, porque utiliza una tasa de interés, como sinónimo de rendimiento relativo, cuando son magnitudes totalmente diferentes.

---

[7] Conceptos vertidos por Alfonso Rodríguez, en su obra titulada “*Matemática de la financiación*”, página 5.
[8] Conceptos obtenidos de la obra mencionada anteriormente en la página 6.

Lo que pretende es determinar la *tasa financiera de rendimiento (TFR)*, que respeta la naturaleza de las operaciones de inversión, en contraposición con lo que expresa la *TIR*, representando una ley de equilibrio en mercados de ahorro.

**2. ¿Cómo logra el objetivo que se propone?**

La solución que plantea el autor es mediante el cálculo de la **inmovilización financiera**, que es la determinación de un **plazo medio equivalente** de los plazos individuales superpuestos, que se diferencia de la *duration* en la consideración de los valores actuales, no simplemente de las cuantías.

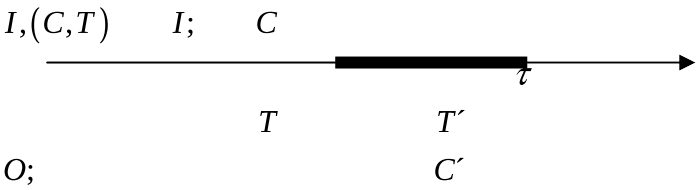
Para entrar en el análisis de esta imprecisión del plazo surge un nuevo concepto que deberá definirse, de acuerdo a lo ya dicho, como *plazo financiero medio equivalente (PFM)*, que es aquel *"… capaz de sustituir la variedad de plazos individuales superpuestos sin pérdida alguna de sus propiedades ante la equivalencia financiera que referencia y fundamenta nuestro análisis".*[9]

La primera aproximación a este concepto se la encuentra en la definición de la *duration*[10] de un bono desarrollada por Macauly, la que será complementada con la noción de *diferimiento medio* al que llamaremos $T$ y que se determina como: $T=\frac{1}{\delta}\ln\frac{C}{V_0}$, donde:

$\left\{(C_r,T_r)\sim(C,T)\right\}$ y $\left\{(C'_s,T'_s)\sim(C',T')\right\}$, representan los input y output respectivamente,

y $V_0=\sum_{r=1}^{n}C_r e^{-\delta T}$ representa el valor actual del conjunto financiero, es decir responde a la formulación general de la Teoría Matemática del Interés, utilizando para el concepto actualización la ***<u>tasa instantánea</u>***, por su carácter nominal.

Convirtiéndose de esta manera en una *OFI simple equivalente*, como muestra el siguiente eje temporal*:*




Entonces, el **plazo financiero medio** (*PFM*) está definido por la siguiente expresión:

$$t=T'-T=\frac{1}{\delta}\ln\frac{C'}{V'_0}-\frac{1}{\delta}\ln\frac{C}{V_0}=\frac{1}{\delta}\left(\ln\frac{C'/V'_0}{C/V_0}\right)=\frac{1}{\delta}\ln\left(\frac{C'}{V'_0}\frac{V_0}{C}\right)=\frac{1}{\delta}\left(\ln\frac{C'}{C}-\ln\frac{V'_0}{V_0}\right)=\boxed{\frac{1}{\delta}\left(k-\ln\frac{V'_0}{V_0}\right)}$$

También introduce la *duration*[11] en el análisis, cuya expresión sería la siguiente: $d(\delta)=\frac{\sum C'_r T'_r e^{T'_r}}{\sum C'_r e^{T'_r}}-\frac{\sum C_r T_r e^{T_r}}{\sum C_r e^{T_r}}$, y es de utilidad para la determinación del óptimo.

En la comparación de estas dos funciones es importante destacar el análisis de los valores críticos de $\delta$, para ello debe tenerse en cuenta que:

---

[9] Conceptos vertidos por Alfonso Rodríguez, en su obra titulada "*Inmunidad Financiera (Matemática de la inversión)*", página 6.
[10] La diferencia radica en que la *duration* original trabajaba con las cuantías de los diferimientos, no con los valores actuales.
[11] Diferencia entre la duration de Macaulay para el input y output.

1. los valores de $\delta$ que hacen que $t(\delta)=0$, separan a las operaciones estrictas y degeneradas, en la primera el *PFM* es positivo y representa la permanencia media de la *OFI* (una inmovilización efectiva), mientras que en la segunda el signo es negativo lo que significa que no existe inmovilización de fondos sino liquidez
2. los valores de $\delta$ que hacen que $d(\delta)=0$ determinan tasas de inmunización
3. los valores de $\delta$ que hacen que $V_0'(\delta)=V_0(\delta)$, es decir que igualan los valores actuales establecen las conocidas *TIRs*

Otras funciones interesantes y complementarias de analizar son:

- la **hipérbola**, *HIP* calculada como: $H(\delta)=\dfrac{k}{\delta}$ y
- la **desviación**, *DES* calculada como:

$$\Delta(\delta)=t(\delta)-H(\delta)=\frac{1}{\delta}\left(k-\ln\frac{V_0'}{V_0}\right)-\frac{k}{\delta}=-\frac{1}{\delta}\ln\frac{V_0'}{V_0}=\frac{\Gamma}{\delta}$$

### 3. Inmunización financiera

Como ya se ha expresado, en este análisis se acepta la *volatilidad* del tipo de interés como una variable analítica sin restricción alguna, tomándose a la ***tasa instantánea*** para expresar dicha dispersión del precio de la financiación, sabiendo que una ley financiera del régimen de capitalización a interés compuesto depende tanto del tipo de interés como del período de capitalización, en este caso el concepto de continuo no debe entenderse como capitalización específico sino como *continuidad del servicio financiero durante el plazo*, es decir un devengamiento continuo de su precio.

En simbología: $\left(1+i_{plazo=n}\right)=e^{\delta n}\Rightarrow\ln\left(1+i_{plazo=n}\right)=\delta n\Rightarrow\delta=\dfrac{1}{n}\ln\left(1+i_{plazo=n}\right)$

Cualquiera de las magnitudes descriptivas de una *OFI* tiene un valor inmunizado de la *volatilidad* si es considerado un *óptimo absoluto* de la función del tipo de interés de mercado.

La *volatilidad* afecta únicamente al *PFM,* no a la cuantía, por eso se debe analizar en los valores inmunizados, es decir en el óptimo, que está dado en el punto de incidencia entre el *PFM* y la *duration (DUR).* En símbolos donde: $d(\delta)=t(\delta)$.

### 4. Un caso práctico

Se analizará un caso práctico, similar al propuesto por el autor, definiendo el modelo bajo los siguientes supuestos:

1. se considerará un ambiente simple estacionario, es decir constante en cuanto a la consideración del precio financiero, ley financiera única con precio financiero constante[12]
2. esto no significa que no se utilizará un sistema de tasas dinámico, pero quedará reducido a un modelo simple mediante el *PFM*

### DATOS

[12] Este modelo se podrá generalizar a un ambiente financiero compuesto, con leyes dinámicas.

| Período | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Ingresos | | 2800 | 1400 | | | | 1400 |
| Egresos | 1400 | | | 1400 | 1680 | 1960 | |

El autor mencionado facilita un programa de cálculo que arroja los siguientes resultados, que se encuentran explicados numérica y conceptualmente en el cuadro que se suministra a continuación:

**PARÁMETROS DE LA OPERACIÓN FINANCIERA (*OFI*)**

Indican las características generales de la operación

| Nombre | Simbología | Calculo |
|---|---|---|
| Cuantía agregada de ingresos | $C=\sum_{t=1}^{n} C_t$ | $5600=2800+1400+1400$ |
| Representa la suma nominal de los ingresos, es decir el total de ingresos provenientes de la inversión | | |
| Cuantía agregada de egresos | $C'=\sum_{s=1}^{m} C'_s$ | $6440=1400+1400+1680+1960$ |
| Representa la suma nominal de los egresos, es decir el total de egresos erogados para desarrollar la inversión | | |
| Constante | $k=\ln\frac{C'}{C}$ | $0.139762=\ln\frac{6440}{5600}$ |
| Representa la tasa efectiva del plazo total, es decir aquella que necesita el "total de ingresos" para convertirse en el "total de egresos", se determina despejando de la siguiente expresión: $C'=Ce^k$ . | | |
| Parámetro β | $\beta= =\frac{\sum C'_s s}{C'}-\frac{\sum C_t t}{C}$ | $0.7174= =\frac{1400\cdot 0+1400\cdot 3+1680\cdot 4+1960\cdot 5}{6440}-\frac{2800\cdot 1+1400\cdot 2+1400\cdot 6}{5600}$ |
| Representa el valor del *PFM* cuando la tasa es cero, ya que en ese punto se produce una indeterminación con este valor se logra la continuidad de la función | | |
| Asíntotas<br><br>1. derecha | $A=T'_1-T_1$, es período del primer egreso, menos el período del primer ingreso | $A=0-1=-1$ |
| 2. izquierda | $B=T_m{}'-T_n$, es el período del último egreso menos el período del último ingreso | $B=5-6=-1$ |
| Representan los valores que no van a alcanzar ni a derecha ni a izquierda, tanto el *PFM* como la *DUR* y son horizontales, en este caso es un valor único -1 | | |
| Óptimo del *PFM* | $t(\delta)=d(\delta)$ | $0.7368$, es el valor de la función para una tasa del 0.0946143 efectivo o del 0.0904021 continuo |

<table>
<tr><td colspan="3">Representa el valor donde la duration - DUR se iguala al plazo financiero medio - PFM, se lo considera un óptimo porque si bien ambas funciones tienen similar comportamiento la primera es menos dispersa, como puede visualizarse fácilmente en el gráfico.</td></tr>
<tr><td>Tasas de degeneración</td><td>$\frac{1}{\delta}\left(k-\ln\frac{V_0'}{V_0}\right)=0$</td><td>$\delta=-0.560040\rightarrow i=-0.428814$ y<br>$\delta=0.91592\rightarrow i=1.499073$<br>Siendo: $i=e^{\delta}-1$</td></tr>
<tr><td colspan="3">Representan las tasas que hacen el PFM nulo, es decir es la intersección de la función con el eje abscisas. Más importante sería destacar que a tasas mayores que las determinadas la inmovilización se convertirían en liquidez, es decir cuando el PFM es negativo, e implica que se trata de una OFI degenerada. En nuestro ejemplo se trata de una OFI estricta.<br>En la expresión los símbolos representan: $V_0'$ es el valor actual de los egresos y $V_0$ es el valor actual de los ingresos a una determinada tasa continua</td></tr>
<tr><td>Tasas implícitas</td><td></td><td>$\delta=-0.706174\rightarrow i=-0.506471$,<br>$\delta=0.19632\rightarrow i=0.216916$ y<br>$\delta=0.723868\rightarrow i=1.062396$</td></tr>
<tr><td colspan="3">Representan las TIRs múltiples que resuelven esta OFI, es este caso son tres porque hay tres cambios de signos en los capitales a lo largo del plazo de evaluación. Por ejemplo, la función específica del Excel da como solución viable únicamente la segunda de estas tasas, elimina la negativa y la última por ser la mayor</td></tr>
<tr><td>Tasas de inmunización<br>1. que hacen nula la DUR<br>2. TFR, tasa financiera de rentabilidad del plazo óptimo<br>3. TFRN tasa financiera de rentabilidad neta</td><td></td><td>1. $\delta=-0.286408\rightarrow i=-0.249044$ y<br>$\delta=0.455251\rightarrow i=0.576569$<br><br>2. $\delta=0.090407\rightarrow i=0.09462$<br><br>3. $\delta=0.541051\rightarrow i=0.717812$</td></tr>
<tr><td colspan="3">Representan cada una de estas tasas:<br>1. los límites para obtener una DUR positiva<br>2. una tasa nominal de rendimiento para el plazo óptimo<br>3. una tasa financiera de rentabilidad neta, su valor fue determinado por el programa que acompaña el autor a su libro.</td></tr>
</table>

Muchas de estas magnitudes son fácilmente identificables a través de la representación gráfica de las funciones relacionadas: el plazo financiero medio (*PFM)*, la duration (*DUR)*, la hipérbola (*HIP)* y la desviación (*DES)*, como lo muestra la siguiente figura, que tiene su explicación a continuación:

1. La función *PFM* en más dispersa que la *DUR.*
2. Las funciones *PFM* y *DUR* se igualan en dos puntos:
   - uno es cuando la tasa es cero, conocido como parámetro β con un valor para las funciones de 0.7364 y
   - el otro es considerado *PFM óptimo* que establece la *TFR*, una de las tasas de inmunización, cuyos valores son: 0.7368 y 0,0946 efectivo, respectivamente.
3. La intersección del *PFM* con el eje de abscisas muestra las tasas de degeneración, que marcan las zonas inmunidad (rentabilidad), para los valores -0.4288 y 1.4991 efectivo.
4. La intersección de la *DUR* con el eje de abscisas que marca la positividad de esta función, representadas por los valores: -0.2490 y 0.5766 efectivo, también son tasas de inmunización que indican rentabilidad, ya que al ser una función más concentrada ambos valores están en la zona indicada en el punto anterior.

5. Las tasas implícitas (*TIRs*) pueden observarse en la intersección de la función *DES* con el eje de abscisas, en el ejemplo tienen los valores: -0.5065, 0.2169 y 1.064 efectivo. También pueden verse en la igualación de las funciones *PFM* y *HIP*

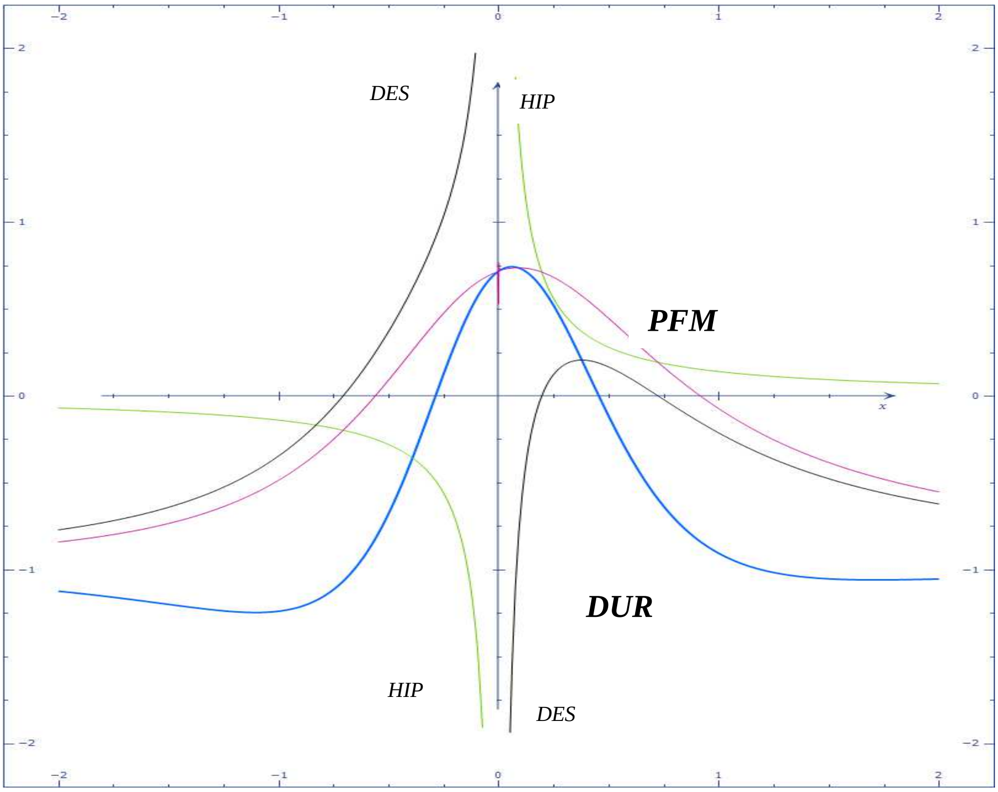



FIGURA 1: Representación gráfica de las funciones básicas *PFM, y DUR,* y complementarias *HIP y DES* de la operación financiera (elaboración propia)

La primera mejora que produce este análisis, con respecto al tradicional, es que soluciona el problema de las *TIRs* múltiples (además de su discusión de si las mismas son tasas de interés o de rendimiento), ya que aporta una solución óptima única.

Por supuesto el autor sigue haciendo un análisis más profundo de las tasas de rentabilidad que propone como soluciones de la operación de inversión, que no serán consideradas tema de este trabajo y que quedarán pendientes para futuros presentaciones.

## ¿QUÉ PASARÍA SI SE TRABAJA EN AMBIENTES INCIERTOS?

Realmente seguimos trabajando en este tema, ya que en una hipótesis inicial supusimos que la incorporación de la incertidumbre al modelo traería la mejora de determinar un área de inmunización financiera, donde se diera el óptimo, pero las magnitudes son muy complejas y realmente las dos funciones básicas, matemáticamente, no dan soluciones de continuidad, con lo cual se sigue investigando si se logra una mejora en el campo de la toma de decisiones.

Para clarificar lo expuesto se expondrá el mismo ejemplo tomado en certeza, pero expresado en unidades borrosas, considerando para ello la más elemental como son los intervalos de confianza y se mostrará la gráfica de los resultados obtenidos.

## DATOS ADECUADOS A UN AMBIENTE INCIERTO

| Período | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Ingresos | | [2780,2820] | [1350,1450] | | | | [1300,1500] |
| Egresos | 1400 | | | [1340,1440] | [1600,1760] | 1859,2050] | |

La siguiente gráfica muestra el comportamiento de las funciones *PFM* y *DUR*, existiendo dos para cada una de ellas por operar matemáticamente con los límites de los intervalos y de manera completa, las cuatro funciones, se observan a continuación:

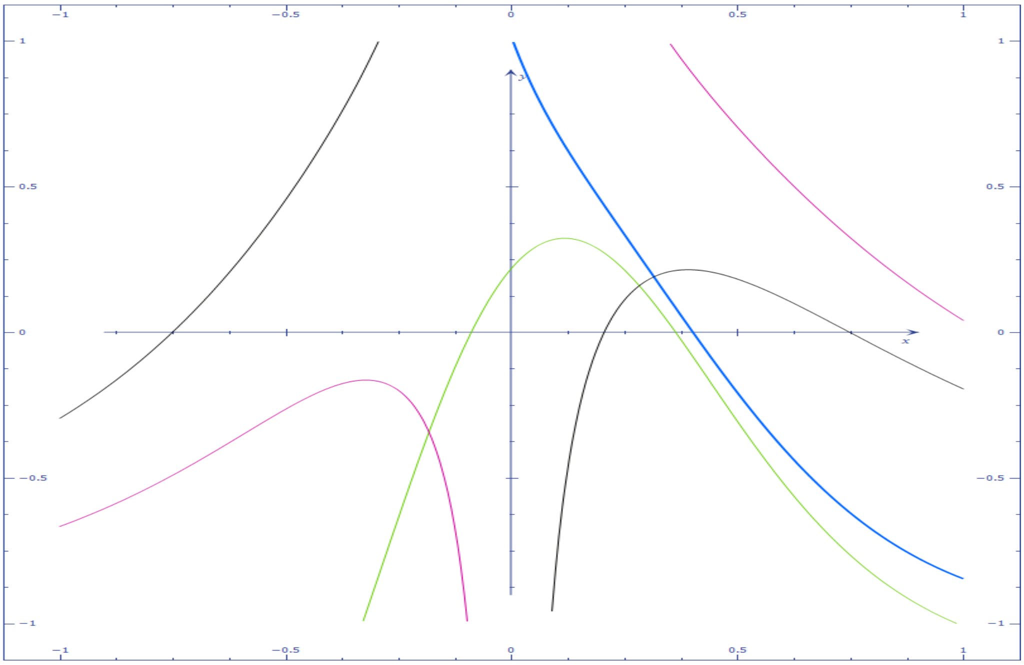


FIGURA 2: Representación gráfica de las funciones básicas *PFM, y DUR,* máxima y mínima en cada una, de la operación financiera borrosa (elaboración propia)

Referencias:

La función ***violeta*** corresponde a la gráfica del ***PFM máximo***, parece no tener continuidad a pesar que se puede calcular un $\beta$ que es positivo

La función ***negra*** corresponde a la gráfica del ***PFM mínimo***, que tampoco refleja continuidad

La función ***azul*** corresponde a la gráfica de la ***DUR máxima***

La función ***verde*** corresponde a la gráfica de la ***DUR mínima***

Si el óptimo surge de la igualdad entre ambas funciones, se identifica en el gráfico que existen dos puntos de unión entre el *PFM mínima* y ambas funciones de la *DUR, máxima* y *mínima,* pero no un área concreta como se pretendía, esto se da por considerar que el *PFM máximo* no pasa por la zona señalada.

Como todo este análisis, es de utilidad cuando está en el cuadrante positivo, pueden observarse estas conclusiones finales, mucho más detalladamente, en el siguiente gráfico:

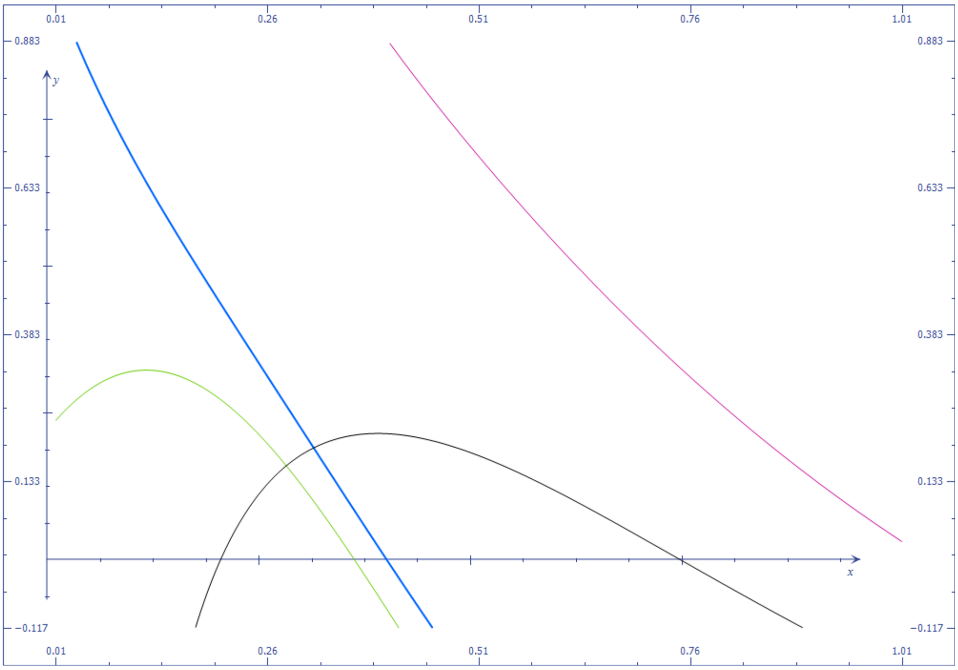



FIGURA 3: Representación del cuadrante positivo de la gráfica de las funciones básicas *PFM, y DUR, máxima* y *mínima* en cada una, de la operación financiera borrosa (elaboración propia)

Las conclusiones realmente no son contundentes como en otros temas tratados, podría considerarse el *área óptima* la formada entre ambas intersecciones marcadas, en el párrafo anterior, y el eje de abscisas, pero realmente hay que seguir estudiando el tema para aceptar, como una mejora al modelo, la conveniencia de este tratamiento en la evaluación de operaciones financieras de inversión en ambientes inciertos.

## CONSIDERACIONES FINALES

A modo de resumen se puede afirmar que las herramientas matemáticas que entregamos a nuestros alumnos, pueden ser utilizadas para modelizar situaciones de decisión complejas y de resolución discutibles por muchos de los usuarios directos de dichos modelos, las que siempre están en proceso de análisis por catedráticos e investigadores de la rama de la Administración Financiera, en su búsqueda de mejoramiento.

Que dichas herramientas dan sustento a las nuevas formas de resolver problemas de decisión actuales (como son las *TIR*s múltiples), ya que se explican las mejoras, se producen programas de cálculo y se induce a resolver las dificultades de elección de alternativas de inversión aportando más herramientas de análisis, las que encontramos perfectamente justificadas en contextos de certeza. Mientras que los resultados con datos inciertos todavía genera, a este grupo de investigación, dudas en la conveniencia de su utilización, es decir que la misma genere un beneficio sustancial en los modelos de toma de decisiones tradicionales ya mejorados con borrosidad (entre otros: *VAN borroso* y *pseudo-TIR*).

Finalmente nos queda por reafirmar que *no nos dejemos abatir con la docencia, nuestro conocimiento es útil, vamos a colaborar a formar profesionales pensantes, que sepan razonar posibles soluciones a los problemas que el ejercicio futuro les depare.*

***¡Podemos seguir martirizándolos con algunas demostraciones analíticas!!!***

**BIBLIOGRAFÍA**


- Murioni, O. y Trossero, A.A.; (1981); Tratado de Cálculo Financiero; Buenos Aires, Argentina; Librería Editorial Tesis.
- Gianneschi, M.A.; (2009); Matemática Financiera; Chaco, Argentina; Librería De la Paz
- Yasukawa, A.M.; (2000); Matemática Financiera; Córdoba, Argentina; Despeignes Editora.
- Rodríguez, A.; “Matemática de la financiación”, Ediciones S, 1994. Barcelona, España.
- Rodríguez, A.; “Inmunidad financiera (matemática de la inversión)”, Ediciones S, 1994. Barcelona, España.
- Rodríguez Rodríguez, A.M.; trabajo titulado “Una revisión económica del valor: el valor financiero. Su aplicación al análisis financiero de la inversión”, disponible en la web, http://diposit.ub.edu/dspace/bitstream/2445/2261/4/arr-cast.pdf