ASOCIACION ARGENTINA
DE ECONOMIA POLITICA

ANALES | ASOCIACION ARGENTINA DE ECONOMIA POLITICA

XLIV Reunión Anual

Noviembre de 2009

ISSN 1852-0022
ISBN ISBN 978-987-99570-7-3

EXTERNALIDADES EN EL JUEGO EVOLUTIVO: UN MODELO DE JUEGO SIMPLE CON DINÁMICAS MUY COMPLICADAS

Anchorena, Sergio Oscar

Externalidades en el Juego Evolutivo

Un modelo de juego simple con dinámicas muy complicadas

Sergio Oscar Anchorena

pollo_mdp@yahoo.com

Facultad de Ciencias Económicas y Sociales

Universidad Nacional de Mar del Plata, Argentina

Resumen: En otro trabajo (Cases, B. and Anchorena, S., 2005), se introdujo una extensión de la teoría clásica de los juegos evolutivos llamada replicador orientado a la estrategia S_G, el objetivo de este trabajo es presentar una nueva variación del replicador orientado a la estrategia para modelar dinámicas económicas y biológicas que incluyen externalidades. Se presenta un modelo de juego simétrico 2x2 de crecimiento poblacional con dinámicas caóticas correspondientes a la ecuación logística de May (1976), que son consecuencia de esas externalidades.

Códigos Temáticos: C6. C7.

Externalities in Evolutionary Game:

Simple Game Model with very complicated dynamics

Abstract: In other work (Cases, B. and Anchorena, S., 2005), an extension of classical theory of evolutionary games was introduced, this extension was called oriented to strategy replicator S_G, the aim of this paper is to show a new variation of strategic oriented replicator to model economic and biologic dynamics that involves externalities and present a model of symmetric 2x2 game of a population grow with chaotic dynamics correspondent to the May's (1976) logistic equation, dynamics that are consequence of these externalities.

Thematic codices: C6. C7.

Externalidades en el Juego Evolutivo

Un modelo de juego simple con dinámicas muy complicadas

Sergio Oscar Anchorena

pollo_mdp@yahoo.com

Facultad de Ciencias Económicas y Sociales

Universidad Nacional de Mar del Plata, Argentina

1. Introducción:

Cuando apareció el libro *Theory of Games and Economic Behavior* de von Neumann y Morgenstern en 1944, la teoría de juegos estaba interesada en encontrar situaciones de equilibrio estable. Este interés permaneció, y acaso se incrementó, con el trabajo de John Nash, John Harsanyi y Reinhard Selten, quienes recibieron el premio Nobel de Economía en 1994.

La noción de Equilibrio de Nash (1950, 1951) como la mejor respuesta de una estrategia respecto de sí misma y el teorema de la existencia del equilibrio de Nash para cualquier juego finito convierten a la teoría de juegos en una disciplina, que se ha interesado, especialmente, en teorizar respecto de situaciones que conducen a equilibrios estables.

La teoría de los juegos evolutivos, por su parte, tuvo su primer desarrollo en el trabajo de R. A. Fishers, *The Genetic Theory of Natural Selection* (1930), y, en 1961, R. C. Lewontin hizo la primer aplicación explícita de la teoría de los juegos evolutivos a la biología evolutiva en su trabajo *Evolution and the Theory of Games*, publicado en el *Journal of Theoretical Biology.*

Sin embargo, fue la publicación de *The Logic of Animal Conflict*, por Maynard Smith y Price en 1993, la que introdujo el concepto de *Estrategia Evolutivamente Estable* (EEE) la que dio amplia difusión a los juegos evolutivos. En 1982, el libro de Maynard Smith *Evolution and the Theory of Games* dirigió la atención al equilibrio dinámico de una población de agentes con intereses enfrentados, y dotados de determinadas estrategias, que se enfrentan al azar, el éxito de una estrategia se define por el número de copias del agente, que tiene determinada estrategia, que jugarán el juego en la siguiente generación.

En la teoría dinámica de los juegos evolutivos las propias estrategias son los jugadores, y los juegos se repiten dinámicamente en cada generación, así, la mayor o menor aptitud de una estrategia sobre otra, que determina la extinción de una de ellas, o bien hace posible la coexistencia, se ve representada en la composición de la población.

La estabilidad, en este caso está determinada por las llamadas Estrategias Evolutivamente Estables. Una estrategia evolutivamente estable se define como aquella con la propiedad de que, si la mayoría de los miembros de una población grande la adoptan, ninguna estrategia mutante podría invadir la población. "En otras palabras, una estrategia es estable, en sentido evolutivo, cuando no existe una estrategia mutante que dé una eficacia darwiniana superior a los individuos que la adoptan"(Maynard Smith, 1978).

Robert Axelrod (1986) realizó dos experimentos de juegos dinámicos, para ello convocó a un conjunto de personas interesadas en la teoría de juegos entre los que había psicólogos, filósofos, sociólogos, biólogos, etc., y les propuso disputar una serie de partidas relacionadas con el famoso dilema del prisionero.

Se realizaron dos torneos, uno de ellos en los que se jugaba un número determinado de partidas conocido por los jugadores y otro en el que el número de partidas a disputar era desconocido por los jugadores.

En ambos casos ganó la estrategia llamada TOMA Y DACA, inventada por Anatol Rapoport, que consiste en cooperar en la primera jugada, y, en cada una de las jugadas siguientes, hacer lo mismo que hiciera el otro jugador en la jugada anterior.

"El extraordinario éxito de TOMA Y DACA sugiere un concepto bastante simple, pero sumamente eficaz: practicar la reciprocidad (...) Cuando el futuro tiene importancia, comparado con el presente, la estrategia TOMA Y DACA es colectivamente estable. Ello significa que si todo el mundo está aplicando el TOMA Y DACA, el mejor consejo que se le puede ofrecer a un jugador concreto es que aplique TOMA Y DACA también" (Axelrod, 1986). De este modo, la estrategia cuya eficacia se comprobó experimentalmente, se corresponde con el concepto de EEE.

En este trabajo, en cambio, se presentará una herramienta que permite modelar situaciones con inestabilidad intrínseca. Mediante una formalización que permite incluir externalidades, es decir, situaciones en las cuales el enfrentamiento entre dos agentes tiene consecuencias sobre un tercero, que no participa de la interacción. Se presenta un juego cuyo estado de equilibrio que puede ser estable o inestable dependiendo de los valores de ciertos parámetros, pero que, aún en situación de inestabilidad, no lleva a la extinción de ninguna de las estrategias del juego, sino a fluctuaciones aperiódicas e irregulares, de tipo caótico, en la evolución temporal de la composición de la población de agentes.

Para este objetivo se aplicarán a los replicadores orientados a la estrategia presentados en Cases, B. y Anchorena, S.(2005) y Anchorena, S. (2003), para modelar juegos evolutivos que incluyen externalidades, cuyas dinámicas abarcan desde dinámicas que alcanzan el equilibrio hasta dinámicas caóticas, que presentan, de modo determinista, inestabilidades que conducen a fluctuaciones aperiódicas e irregulares, en particular, se presenta un juego simétrico 2x2 que reproduce las dinámicas de la ecuación logística presentada por May en un trabajo de 1976.

2. Externalidades:

Una externalidad existe cuando una decisión de uno o varios agentes causa efectos, costos o beneficios, sobre uno o varios agentes que no participan de la decisión. En otras palabras, una externalidad hace que determinados agentes no paguen todos los costos, o no obtengan todos los beneficios, que se derivan de sus actos.

Así, las externalidades se manifiestan en una diferencia entre el costo privado y el costo social y pueden crear fallos de mercado si el mecanismo de precios no incluye los costos y beneficios sociales de las acciones de productores y consumidores.

En presencia de externalidades, cuyos costos no se internalicen, el óptimo privado y el óptimo social no coinciden. El agente o los agentes que las producen no calculan, en sus decisiones, los efectos de las externalidades sobre terceros, sean estos efectos beneficiosos o perjudiciales.

Friedrich von Hayek y Milton Friedman se refieren a las externalidades como “efectos sobre el vecindario”, o “salpicaduras”, aunque, en algunos casos, como en el calentamiento global, o el agotamiento de los combustibles fósiles, el vecindario salpicado parece ser toda la humanidad (Wikipedia, 2005).

Situaciones análogas a las externalidades aparecen en la biología evolutiva. El propio Maynard Smith (1978), para ejemplificar las situaciones de conflicto de intereses entre animales que pueden ser modeladas con juegos evolutivos describe un estudio de Davies sobre el comportamiento territorial de unas mariposas que ejemplifica esto. Los machos, a la espera del apareamiento, defienden sus posiciones en las manchas de luz solar en una floresta, ya que las hembras se dirigen hacia esas manchas. Según el estudio de Davies, las manchas de luz disponibles alcanzan solo para una parte de los machos al mismo tiempo, el resto de ellos patrulla desde arriba. Cuando uno de estos intenta ocupar la mancha de otro, ocurre un enfrentamiento que consiste en un breve vuelo en espiral (3 o 4 segundos), después del cual, el propietario retorna a su posición.

El estudio muestra que, mientras el macho esta en el vuelo espiral con el intruso, un tercer macho puede reemplazarlo en la mancha de luz, así, un tercer macho que no participó de la contienda resulta propietario de la mancha de luz, obtiene una ganancia y aumenta sus probabilidades de reproducirse, y esto ocurre como consecuencia de los actos de los otros dos machos, cada uno de los cuales, obró en su propio interés reproductivo, pero terminó beneficiando a un tercero. Sin embargo, Maynard Smith no presenta en su modelo una posibilidad de representar esta última situación.

Los replicadores orientados a la estrategia que se presentarán más adelante, en cambio, permiten representar, entre otras muchas, situaciones como ésta. Antes de esa presentación se exponen algunas características de las fluctuaciones en Economía y Biología, campos privilegiados en la aplicación de los juegos evolutivos.

3. Fluctuaciones Aperiódicas

La existencia de fluctuaciones aperiódicas, esto es, no cíclicas, es ampliamente estudiada en Biología de las Poblaciones (Lotka, 1925, Volterra, 1926, May, 1976, Montero and Morán, 1992, Solé and Manrubia, 1996) y en Economía (Peters, 1994, 1996, 1999, 2001, Godwin, 1996)

La Biología de las Poblaciones, es un campo emergente que integra aspectos de Biología Evolutiva, Bioinformática, Modelado Matemático y Ecología, con el objetivo de entender las interacciones complejas que se establecen entre agentes y los cambios globales que se producen en y por estas interacciones complejas. El campo incluye investigaciones básicas, aplicadas y teóricas, incluyendo temas como la invasión o la coexistencia entre especies e interacciones entre presas y predadores, entre otras. Mediante el modelado matemático de las relaciones entre agentes (cooperación, competición, etc.) se derivan dinámicas poblacionales que aportan al estudio de la Genética de Poblaciones, la Filogeografía, la Ecología Conductual, y a la comprensión de los procesos de extinción y coexistencia de poblaciones animales, vegetales o humanas.

En el caso de la economía, las fluctuaciones también están presentes en estudios sobre diferentes campos que estudian dinámicas de crecimiento (Klenow and Rodríguez, 2005), de consumo (Attanasio, Carroll, and Rios-Rull, 2005), de distribución del ingreso (Benabou, Durlauf and Galor, 2005), de mercado de trabajo (Rogerson, 2005, Shimer, 2005), y, acaso especialmente, en estudios sobre las dinámicas del mercado de capitales (Peters, 1994, 1996, 1999, 2001) y las finanzas (Watson and West,2005).

En todos esos estudios subyace la presunción de que la causa de esas fluctuaciones son dinámicas de tipo caótico. Por caos se entiende el comportamiento dinámico aperiódico (es decir oscilaciones irregulares, que no se repiten nunca, de período infinito) que aparece bajo ciertas condiciones totalmente deterministas y que presenta gran sensibilidad a las condiciones iniciales. (Montero y Morán, 1992)

Los atributos esenciales del caos, de acuerdo con esta definición, son:

1. Determinista: significa que el sistema presenta un comportamiento totalmente aperiódico, aún en ausencia de todo tipo ruido y de fluctuaciones externas.
2. Impredecible: Se relaciona con la aperiodicidad, dado que no existen ciclos regulares, resulta imposible predecir el comportamiento futuro, así como conocer la historia pasada del sistema, por medio del conocimiento del estado actual. La impredecibilidad involucra dos características.
    a) Dependencia sensible a las condiciones iniciales: existe una divergencia exponencial de las trayectorias que determina que la más mínima perturbación se amplifique y produzca que, a partir de dos puntos de partida inicialmente próximos puedan derivarse comportamientos totalmente distintos.
    b) Transitividad topológica: Es la propiedad contraria a la anterior y significa que órbitas muy alejadas inicialmente pueden llegar a converger, dando origen a los llamados atractores caóticos.

El fenómeno caótico se encuentra presente en un gran número de sistemas de la más variada procedencia, y, particularmente, en los llamados sistemas complejos en los que interactúan localmente una gran cantidad de elementos y el comportamiento ordenado del conjunto no se deriva directamente de las leyes que rigen el comportamiento cada uno de los elementos que lo componen. A diferencia del azar o el desorden, el caos, responde a pautas universales y perfectamente determinadas que permiten su detección y su análisis (Montero y Morán, 1992).

4. Juegos Simétricos 2x2 y dinámicas de replicador

Siguiendo la notación de Weibull (1996) se define un juego 2x2 (juego simétrico bi-personal) como un triplete $G= (I, S, \pi)$

Donde $I = \{A, B\}$ es el conjunto de dos jugadores

$S_A = S_B = K = \{s_1, s_2\}$; es un conjunto de 2 estrategias puras para cada jugador.

$S = S_A \times S_B$; es el espacio de estrategias puras, el producto cartesiano de los conjuntos de estrategias puras de cada jugador.

π: $S \rightarrow R^2$ es la función de pagos para cada jugador, donde $\pi_A(s_1, s_2)=\pi_B(s_2, s_1)$ para todo $(s_1, s_2) \in S$.

Las funciones de pago se representan con una notación matricial, siendo $\pi_A=A$, *y* $\pi_B=B$, donde A y B son dos matrices de dimensión $2x2$.

La matriz A, para cada enfrentamiento entre estrategias (i,j), asigna el correspondiente pago $\pi(i,j) = a_{ij}$, el elemento de la fila i, y la columna j de la matriz A.

El requerimiento de simetría en la función de pagos es equivalente al requerimiento de que la matriz de pago B del segundo jugador sea la traspuesta de la matriz A que representa la función de pagos π_1, del primero $B = A^T$.

Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ entonces $b_{ij} = a_{ji} \forall i, j = 1,2$

En la dinámica de replicador consiste en suponer una población en un tiempo t, $P(t)$ donde $P_i(t)$ es la población de individuos programados con la estrategia pura $s_i \in S$ en una etapa t de un juego evolutivo, así $P(t)=\Sigma_{i=1,2} P_i(t)>0$.

El vector asociado al estado de la población es $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$ donde $x_i(t) = \dfrac{P_i(t)}{P(t)}$ es la proporción de a población programada para utilizar la estrategia $i \in S$ en el tiempo t. El efecto de una situación de estado polimórfico (coexistencia de agentes con distintas estrategias) de la población $x(t)$ es igual a lo que ocurre en un juego en el que un jugador utiliza una estrategia mixta: un vector que asigna probabilidad a que un agente cualquiera esté utilizando una estrategia determinada en un enfrentamiento, sólo que en el caso de las estrategas mixtas representa la frecuencia de uso de una estrategia para cada jugador, y aquí la frecuencia del uso de la estrategia en el interior de la población.

El pago a una estrategia pura $i \in K$ *es* $u(e^i,x(t)) = e^i A x(t)^T$ donde e^i es el vector que asigna 1 al componente i y 0 al resto de los k-1 componentes.

El pago promedio esperado para la población que juega con la estrategia pura i si el estado de la población es $x(t)$, es designado como $u(e^i,x(t))=e^i A x(t)^T$. El pago promedio de la población, que es el promedio de cualquier individuo que se enfrenta al azar, es

$$u(x_i(t), x(t)) = \sum_{i=1}^{k} x_i(t) u(e^i, x(t)) \qquad (1)$$

Considerando cualquier matriz A de dimensión 2×2, el vector que describe el estado de la población para cada una de las dos estrategias resulta $x(t)=(x_1(t),(1-x_1(t))$, las utilidades se calculan como sigue:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$u(x(t),x(t)) = x(t)Ax(t)^T = (x_1(t) \;\; (1-x_1(t)))\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1(t) \\ (1-x_1(t)) \end{pmatrix} =$$

$$= ax_1^2(t) + (b+c)x_1(t)(1-x_1(t)) + d(1-x_1(t))^2 =$$

$$= (a+d-(b+c))x_1^2(t) + ((b+c)-2d)x_1(t) + d \qquad (2)$$

$$u(x_i(t),x(t)) = x_i(t).e^i Ax^T = x_i(t)e^i\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1(t) \\ (1-x_1(t)) \end{pmatrix} =$$

$$u(x_1(t),x(t)) = (a-b)x_1^2(t) + bx_1(t) \qquad (3)$$

$$u(x_2(t),x(t)) = (c-d)x_1^2(t) + (c-2d)x_1(t) + d \qquad (4)$$

La dinámica de la población es determinada por iteraciones t = *1, 2, 3,......,* resultando para la población que utiliza la estrategia $i \in K$,

$$P_i(t+1) = \alpha + u(x_i(t),x(t))P(t) \qquad (5)$$

dónde α representa la tasa de reproducción que tendría el agente en ausencia de enfrentamientos, y para el conjunto de la población.

$$P(t+1) = \sum_{i=1}^{k}(\alpha + u(x_i(t),x(t))P(t)) = (\alpha + u(x(t),x(t)))P(t) \qquad (6)$$

Dividiendo ambos miembros de la ecuación 5 por 6, el total de la población en $t+1$, se obtienen las dinámicas en tiempo discreto del replicador $\Re_G(t,x(0))$ que, partiendo de $x(0)$ indica la composición de la población para cualquier paso t de la iteración $x_i(0) \rightarrow x_i(1) \rightarrow \ldots\ldots \rightarrow x_i(t) \rightarrow x_i(t+1)$, $\Re_G(t,x(0)) = x(t)$ mediante la ecuación:

$$x_i(t+1) = \frac{\alpha + u(x_i(t),x(t))}{\alpha + u(x(t),x(t))} \qquad (7)$$

Siendo que la existencia del término resulta equivalente a sumar a cada elemento de la matriz del juego el valor α [1], en adelante, para simplificar, se supondrá α =0, ya que esto no afecta los resultados finales. Por lo que resulta:

$$x_i(t+1) = \frac{u(x_i(t),x(t))}{u(x(t),x(t))} \qquad (8)$$

Así, dada una matriz de pagos A, en un juego simétrico 2x2 utilizando las fórmulas (3), (4) y (8), a partir de cualquier momento t es posible derivar la composición en $t+1$ mediante las expresiones:

[1] una demostración de esto puede encontrarse en Anchorena y Cases, 2005

$$x_1(t+1) = \frac{(a-b)x_1^2(t) + bx_1(t)}{(a+d-(b+c))x_1^2 + ((b+c)-2d)x_1 + d} \quad (9)$$

$$x_2(t+1) = \frac{(d-c)x_1^2(t) + (c-2d)x_1(t) + d}{(a+d-(b+c))x_1^2 + ((b+c)-2d)x_1 + d} = 1 - x_1(t+1) \quad (10)$$

El equilibrio estará dado cuando para toda estrategia *i*

$$x_i(t+1) = x_i(t) = x_i^* \qquad \forall i \in I \quad (11)$$

En los desarrollos sobre juegos evolutivos se demuestra que el equilibrio siempre es alcanzable en juegos con poblaciones finitas en los que solo existen dos estrategias puras (Maynard Smith, 1988).

5. Replicadores orientados a la estrategia y externalidades

Los juegos evolutivos *2x2* con replicadores orientado a la estrategia $G = (I,S,\pi,\Pi_1\ \Pi_2)$ son similares a los juegos *2x2*

Así, el triplete $G = (I,\ S,\pi)$ es un juego bi-personal simétrico pero la función de pagos es $\pi = \sum_{i=1}^{k} \Pi_i$. Se denomina π al pago global de *G*.

Cada sub-juego orientado a la estrategia es el triplete $G_h = (I,S,\Pi_h)$, que establece una función de pagos Π_h para la estrategia *h* resultante de cualquier contienda entre dos agentes, sea que participe la estrategia *h* del agente en cuestión, o no.

Así, cada triplete $G_h = (I,S,\Pi_h)$ es un juego bi-personal simétrico, con una función de utilidad v_h llamado el sub-juego para la estrategia *h*.

El juego evolutivo *2x2* estratégicamente orientado $G = (I,\ S,\pi,\Pi_1,\Pi_2)$ es un refinamiento del juego global $G = (I,S,\pi)$ por lo que se designa con el mismo nombre sin perder generalidad.

El pago en el juego global es determinado por la matriz *A*, la cual da para cada enfrentamiento *(i,j)*, asigna el correspondiente pago $\pi(i,j) = a_{ij}$, el elemento de la fila *i*, y la columna *j* de la matriz del juego *A*.

La matriz A_h representa la función de pagos Π_h para la estrategia $h \in K$ para cada confrontación *(i,j)*, siendo $\Pi_h(i,j) = a_{hij} \in I\!R$ siendo el elemento de la fila *i*, y la columna *j* de la matriz del sub-juego A_h.

La matriz del juego global es $A = \sum_{h=1}^{k} A_h$

Cuando los confrontantes *(i,j)*, son diferentes de *h,* estamos en presencia de una externalidad, ya que el pago que *h* reciba por esta confrontación, a_{hij}, significará un beneficio (pago positivo) o un costo (pago negativo), que proviene del efecto de una interacción en la cual la estrategia *h* no participa.

Sea $v_h(x,y) = xA_hy^T$ la función de utilidad del sub-juego G_h, donde *x,y* son estrategias mixtas. La función de utilidad del juego global *G* es

$$u(x,y) = \sum_{h=1}^{k} v_h(x,y) = \sum_{h=1}^{k} xA_h y^T$$

Así, la dinámica de replicador para un juego orientado la estrategia, resulta para cada estrategia *h:*

$$P_h(t+1) = \alpha + v_h(x(t),x(t))P(t) \qquad (12)$$

Y, para el conjunto de la población:

$$P(t+1) = \sum_{h=1}^{k} P_h(t+1) = (\alpha + u(x(t),x(t)))P(t) \qquad (13)$$

Decimos que *G* define un replicador estratégicamente orientado designado $S_{G1}+....S_{Gk}$ o simplemente S_G. La expresión $S_G(t,x(0))$ determina, comenzando por cualquier condición inicial $x(0) = (x_1(0),x_2(0))$ el estado de la población en un paso *t*, de la derivación, $S_G(t,x(0))= x(t)$, mediante la ecuación:

$$x_h(t+1) = \frac{p_h(t+1)}{p(t+1)} = \frac{\alpha + v_h(x(t),x(t))}{\alpha + u(x(t),x(t)} = \frac{\alpha + x(t)A_h x(t)^T}{\alpha + x(t)Ax(t)^T} \qquad (14)$$

Comparando la ecuación 14 con la 8, del replicador clásico, existe ahora una matriz A_h diferente para cada estrategia *h*, y así, el polinomio que representa la utilidad después de una iteración del juego $x(t)A_hx(t)^T$ es cuadrático mientras que en el replicador clásico, $u(e^i,x(t))$, es lineal, y se trasforma en cuadrático cuando es multiplicado por $x_h(t)$.

Se sigue cumpliendo que el equilibrio se da cuando para toda estrategia *i*

$$x_i(t+1) = x_i(t) = x_i^*(t) \qquad \forall i \in I$$

Sólo que, como se mostrará en el ejemplo que sigue, este equilibrio no necesariamente es estable, y, puede darse el caso coexistir las diferentes estrategias del juego, fluctuando aperiódicamente en su composición, sin que ninguna logre imponerse sobre la otra.

6. Ejemplo: El juego de las mariposas de Davies (con externalidades)

Descripción informal: El juego simula una población en un ambiente finito de *N* posiciones de manchas de sol. La población formada por agentes con dos tipos de estrategia, los *Luchadores* y los *Oportunistas*. Los *Luchadores* son las mariposas macho que intentan ocupar manchas de luz enfrentándose con otra mariposa. Los *Oportunistas* son los machos que rehúyen a los enfrentamientos y sobrevuelan esperando encontrar una mancha de luz vacía.

Cuando sale el sol, las mariposas machos se dirigen hacia las manchas de sol, el tamaño de la población total es el doble que el de las manchas y necesitan conseguirlas porque así aumentan su posibilidad de reproducirse, ya que las hembras tienden también a dirigirse hacia las manchas. Se producen encuentros entre *Luchadores* y *Oportunistas*.

Cuando un *Luchador* se encuentra con otro *Luchador* en una mancha se enfrentan en un vuelo ritual en espiral, la mancha queda vacía y es ocupada por un *Oportunista*. Cuando un *Luchador* se encuentra con un *Oportunista*, este huye, y el *Luchador* logra la mancha de luz, y, con ella gana un incremento en su tasa de reproducción en μ.

Un *Oportunista* que huye cuando se encuentra con un *Luchador* y abandona el lugar sin enfrentarse, tiene una pérdida de μ en su tasa de reproducción. Cuando un *Oportunista* se encuentra con otro, uno de los dos ocupa la mancha de luz y el otro se retira.

La tasa de reproducción promedio de los *Luchadore*s en ausencia de enfrentamientos, es *0*, la ción de los *Oportunistas* en ausencia de enfrentamientos es *2*.

Conforme a lo desarrollado, la eficacia reproductiva esperada después de los enfrentamientos resulta.

	Para los *Luchadores*	Para los *Oportunistas*
Luchador-Luchador	0	2
Luchador-Oportunista	μ	2-μ
Oportunista-Luchador	μ	*2-μ*
Oportunista-Oportunista	0	2

La asignación de puntajes representa el efecto sobre la eficacia biológica en cada uno de los casos posibles. Conforme a la descripción anterior, las matrices de pagos esperados para cada estrategia, por cada posible enfrentamiento resultan:

Para los *Luchadores:*

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & \mu \\ \mu & 0 \end{pmatrix}$$

Para los *Oportunistas:*

$$A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 2-\mu \\ 2-\mu & 2 \end{pmatrix}$$

Dónde el segundo elemento de la segunda línea de la matriz A_1 representa una externalidad para los *Luchadores*, ya que proviene de un enfrentamiento entre *Oportunistas*, y el primer elemento de la primera línea de la matriz A_2 representa las externalidades para los *Oportunistas*, ya que proviene de un enfrentamiento entre dos *Luchadores*. En los ambos casos los pagos resultan de los enfrentamientos de agentes con estrategias diferentes de la estrategia en cuestión.

El número de manchas de luz y, consecuentemente, la parte de la población que puede reproducirse, es *N* para todo tiempo *t*.

La población resultante después de la reproducción y al iniciar cada confrontación en cada tiempo *t* es 2*N*

Esto se cumple porque la matriz de pagos total es

$$A = A_1 + A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Así, las dinámicas de la población para cada estrategia resultan determinadas por:

$$P_1(t+1) = x(t)A_1x(t) = 2\mu x_1(t)(1-x_1(t))N$$

$$P_2(t+1) = x(t)A_2x(t) = [2-2\mu x_1(t)(1-x_1(t))]N$$

$$P(t+1) = P_1(t+1) + P_2(t+1) = 2N$$

y, por lo tanto,

$$x_1(t+1) = \frac{P_1(t+1)}{P(t)} = \frac{2\mu x_1(t)(1-x_1(t))N}{2N} = \mu x_1(t)(1-x_1(t))$$

$$x_2(t+1) = \frac{P_2(t+1)}{P(t)} = \frac{[2-2\mu x_1(t)(1-x_1(t))]N}{2N} = 1-\mu x_1(t)(1-x_1(t))$$

La función que expresa la cantidad de *Luchadores* en la generación *t+1* se conoce con el nombre de *ecuación logística* y que es el ejemplo más simple que se conoce que permite obtener dinámicas caóticas. En 1976 Robert May en su trabajo *Simple Mathematical Models with very complicated dynamics*, realiza un profundo análisis esta ecuación, sugiriéndola como un modelo útil para mostrar cómo ciertas poblaciones biológicas pueden devenir en caóticas.

Aplicando la condición de equilibrio $x_1^* = \mu x_1^*(1-x_1^*)$ se obtienen dos soluciones $x_{11}^* = 0$ esto es, una población sin *Luchadores* y otra $x_{12}^* = 1 - 1/\mu$ que puede ser polimórfica o no, dependiendo del valor de μ.

7. Del equilibrio evolutivamente estable, al Evolutivamente inestable

En este apartado se analiza el equilibrio del sistema para diferentes valores enteros del parámetro μ comprendidos entre *1* y *4*. Si bien el valor de μ puede tomar cualquier valor real en el intervalo (0,4] el uso de los números enteros comprendidos en el intervalo es suficiente para ejemplificar el funcionamiento del modelo.

Los límites del valor μ, se justifican en que para todo *t,* la población que utiliza una determinada estrategia $P_i(t)$ debe ser necesariamente menor que la población total $P(t)$ y, por lo tanto debe cumplirse que

$x_1(t+1) = \mu x_1(t).(1- x_1(t)) \leq 1$

Para ello planteamos $F\mu(x) = \mu x(1-x)$ *y* cuando la derivada primera es igual a cero, y la derivada segunda es negativa, entonces tenemos valor máximo de la función. Derivando la primera vez

$$\frac{\partial F\mu(x)}{\partial x} = \mu - 2\mu.x = 0$$

resulta $x = 1/2$ y la segunda condición se cumple para todo $\mu > 0$.

$$\frac{\partial^2 F\mu(x)}{\partial x^2} = -2\mu < 0$$

Por lo que para que $F\mu(x) = \mu\,(1/2)(1-1/2) \leq 1$ debe cumplirse $0 < \mu \leq 4$.

El equilibrio puede ser de tres tipos: estable, indiferente o inestable. Sea un sistema en equilibrio en un punto x^* la estabilidad del equilibrio se define en función de las respuestas del sistema a perturbaciones en el valor de x^*.

El equilibrio es *estable* cuando, ante una perturbación respecto del valor de x^*, el efecto de la perturbación tiende a desaparecer con el paso del tiempo, es decir, el sistema recuperar el equilibrio, es decir el valor x^*.

El equilibrio es *inestable* cuando, ante una perturbación respecto del valor de x^*, el efecto de la perturbación tiende a aumentar con el paso del tiempo, es decir, el sistema no recupera el valor x^*.

Finalmente, el equilibrio es *indiferente* cuando, ante una perturbación respecto del valor x^*, el efecto de la perturbación tiende a permanecer con el paso del tiempo.

Dado que en cada generación el incremento de una perturbación no es más que una progresión geométrica, donde la derivada de $F\mu$ en x^* hace de razón (Solé y Manrubia, 1996), se obtiene la condición que define la estabilidad calculando:

$$\lambda = \left| \frac{\partial F\mu(x)}{\partial x} \right|_{x^*}$$

Si $|\lambda|_{x^*} < 1$ el equilibrio es estable, ya que el efecto de una perturbación tenderá a desaparecer.

Si $|\lambda|_{x^*} > 1$ el equilibrio es inestable, ya que el efecto de una perturbación tenderá a aumentar.

Si $|\lambda|_{x^*} = 1$ el equilibrio es indiferente, ya que el efecto de una perturbación tenderá a mantenerse.

Para el análisis del equilibrio se estudiará el valor de λ para x_1^*, ya que si x_1^* es estable, $x_2^*=1- x_1^*$, necesariamente, también lo es, por lo tanto

$\lambda = \mu - 2\mu x_1^*$

μ = 1 Un lento camino hacia la extinción

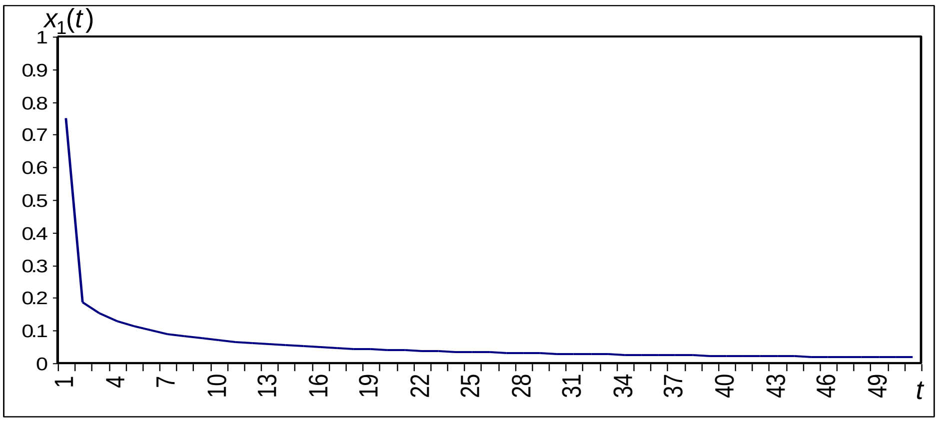
El valor $\mu = 1$ se interpreta como que, por cada mancha de luz conquistada por los luchadores se obtiene como promedio un *Luchador*, el único punto de equilibrio en este caso es $x_{11}^*=x_{12}^*=0$, que corresponde al equilibrio, en el que solo existen *Oportunistas*.

$|\lambda|_{x^*} = |\lambda|_0 = 1$ por lo que el equilibrio es indiferente, y el efecto de una perturbación tiende a permanecer, y en consecuencia el equilibrio no se alcanzará nunca evolutivamente aunque la dinámica se aproxime a éste asintóticamente.

En nuestro sistema, los *Luchadores* tenderán a desaparecer muy lentamente a lo largo del tiempo.

Un ejemplo de 50 períodos partiendo de $P(0) = (0.74,0.26)$ los valores de $x_1(t)$ que describen la dinámica del sistema quedan expresados en el gráfico 1:

Gráfico 1: Serie temporal $x_1(t)$ para $\mu = 1$



μ = 2 El camino hacia la estabilidad

Si suponemos un incremento en la tasa de reproducción, con el que se obtengan *2 Luchadores* a partir de una mancha de luz ganada a los oportunistas, esto es $\mu = 2$, en el equilibrio $x_{11}^{*}=0$, $x_{12}^{*}=1/2$

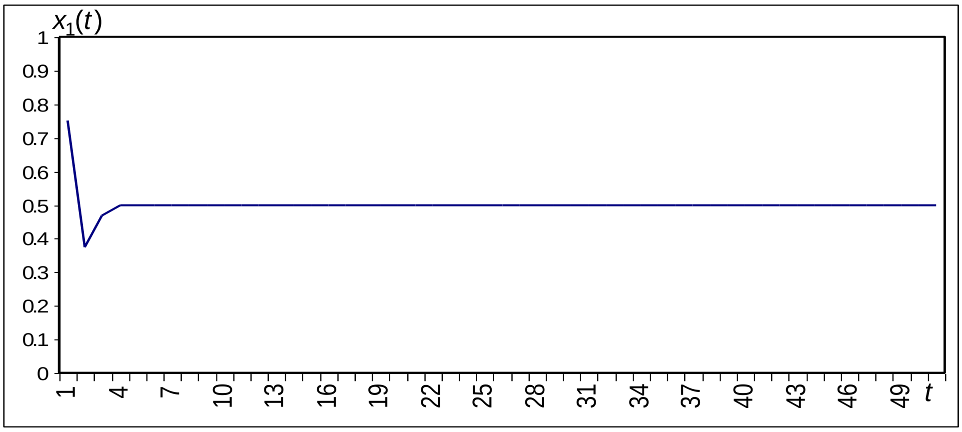
$|\lambda|_0 = |2| = 2>1$ por lo que el equilibrio es inestable

$|\lambda|_{1/2} = |2-2| = 0 < 1$ por lo que el equilibrio es estable, y se alcanzará evolutivamente.

Estos dos resultados se interpretan como que, partiendo de una población polimórfica, con las dos estrategias, en cualquier proporción, la población llegará a un equilibrio en el que cada estrategia represente la mitad de la población.

El gráfico 2, presenta los valores de $x_1(t)$, partiendo del mismo punto $P(0) = (0.74,26)$ del caso anterior.

Gráfico 2: Serie temporal $x_1(t)$ para $\mu = 2$



μ = 3 Ni tanto ni tan poco

Si se incrementa la tasa de reproducción, de modo de obtener una media de *3 Luchadores* por cada mancha ganada a los *Oportunistas*, esto es $\mu = 3$, los puntos de equilibrio son $x_{11}^{*}=0$ y $x_{12}^{*}=2/3$ y, respectivamente:

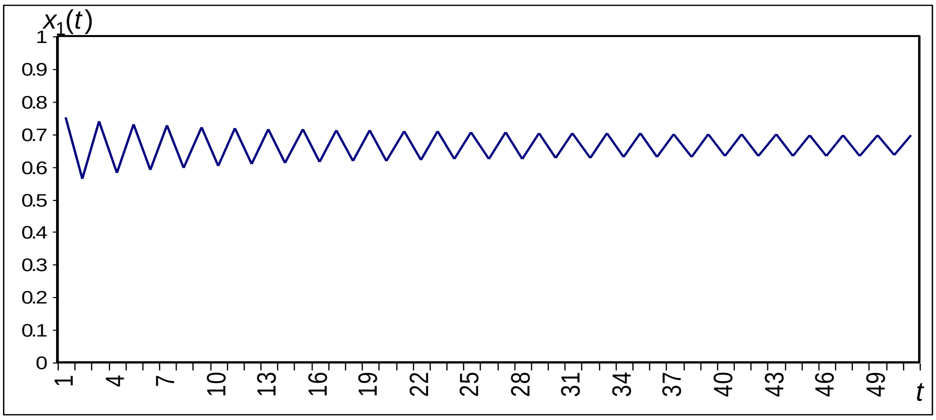
$|\lambda|_0 == 3>1$ por lo que el equilibrio es inestable.

$|\lambda|_{2/3} = 1$ por lo que el equilibrio es indiferente, y no se alcanza evolutivamente.

Estos dos resultados se interpretan como que, partiendo desde cualquier punto $x_1(t) \neq x_{11}^*$ o ante cualquier perturbación del estado x_1^*, el sistema se dirigirá hacia al estado x_{12}^*, pero no lo alcanzará evolutivamente aunque se acerque a este con oscilaciones cada vez de menor amplitud.

El gráfico 3 corresponde a los valores de $x_1(t)$, siempre desde el mismo punto de partida $P(0) = (0.74,26)$.

Gráfico 3: Serie temporal $x_1(t)$ para $\mu = 3$



μ = 4 El caos

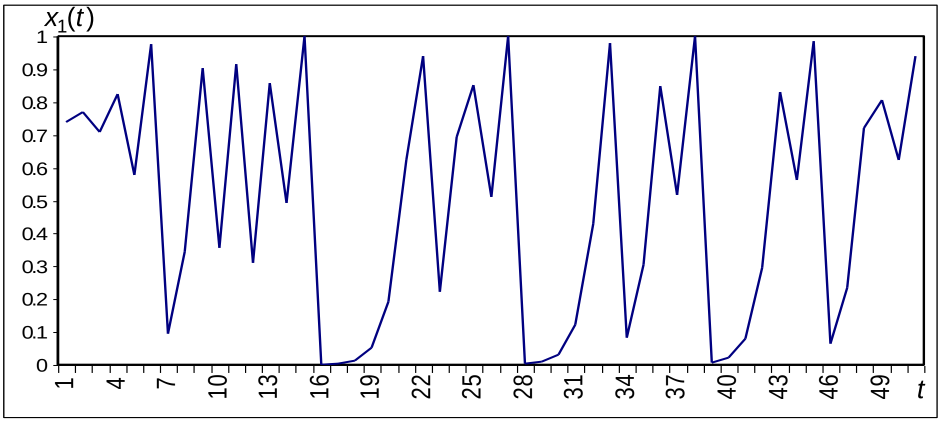
Si la tasa de reproducción de los *Luchadores* que conquistan una mancha de luz toma valor máximo $\mu = 4$, esto es se obtienen como promedio *4 Luchadores* por mancha ganada y, los puntos de equilibrio son $x_{11}^{*}=0$ y $x_{12}^{*} = 3/4$ y, respectivamente:

$|\lambda|_0 = |4| = 4 > 1$ por lo que el equilibrio es inestable

$|\lambda|_{3/4} = |4-2| = 2>1$ por lo que el equilibrio es también inestable.

Estos dos resultados se interpretan como que, partiendo desde cualquier composición polimórfica de la población diferente del equilibrio, o ante cualquier mínima perturbación en el estado $(x_{11}^*,(1- x_{11}^*))$, o en el estado $(x_{12}^*,(1-x_{12}^*))$, el sistema no recuperará ni el estado de equilibrio, ni se dirigirá hacia al otro estado de equilibrio, ni tendera a acercar se evolutivamente a ninguno de ellos. El gráfico 4 representa la evolución de los valores de $x_1(t)$, a partir de $P(0)$=(0.74,0.26)[2].

Gráfico 4: Serie temporal $x_1(t)$ para $\mu = 4$



[2] Un valor sumamente cercano al punto de equilibrio $P^*= (0.75,0.25)$

Este tipo de comportamiento se presenta para los valores de μ que superan un umbral crítico μ_k y determinan las fluctuaciones aperiódicas e irregulares, ya que para valores inferiores se tiende o bien a la extinción de los Luchadores para $\mu < 1$, o bien al estado de equilibrio estable, como con $\mu = 2$, o bien el sistema se acerca al estado de equilibrio de manera asintótica y oscilante como con $\mu = 3$, May (1976) demuestra que el umbral crítico se da para $\mu_k = 3{,}53$

Resulta interesante destacar que la media de los valores de $x_1(t)$ para los diferentes valores de μ por debajo del umbral crítico (1, 2 y 3) coinciden con el valor de equilibrio x_{12}^* mientras que para $\mu=4$ el valor de la media es de 1/2, coincidente con el de una serie aleatoria. Es pertinente entonces determinar si esta es la serie de datos que arroja el replicador orientado a la estrategia es caótica, es decir determinista, o aleatoria.

8. Es esto Caos?

Existen diferentes métodos para determinar si una serie temporal de datos es caótica o aleatoria, pero el método más exacto para determinar la presencia de caos, que es el que se utilizará en este trabajo, consiste en calcular el máximo coeficiente de Liapunov (Solé y Manrubia, 1996, Montero y Morán, 1992) que da una idea de cómo evolucionan dos órbitas que parten de dos puntos muy próximos. Este coeficiente permite identificar el caos a partir de la propiedad más característica de caos señalada arriba como sensibilidad a las condiciones iniciales.

En el caso de una ecuación en diferencias unidimensionales, como es el caso que nos ocupa, el coeficiente máximo de Liapunov se calcula a partir del *número **0** coeficiente de Liapunov* (Montero y Morán, 1992) que se define como:

$$\kappa = \lim_{t\to\infty}\left(J_t\right)^{1/t}$$

dónde:

$$J_t = \left|\left(\frac{\partial F\mu(x)}{\partial x_1}\right)_{x_1(1)}\right| \cdot \left|\left(\frac{\partial F\mu(x)}{\partial x_1}\right)_{x_1(2)}\right| \cdots\cdots\cdots \left|\left(\frac{\partial F\mu(x)}{\partial x_1}\right)_{x_1(t)}\right|$$

El coeficiente de Liapunov se obtiene calculando logaritmos neperianos:

$$\ln\kappa = \lim_{t\to\infty}\frac{\ln j_t}{t}$$

En el juego que nos ocupa, con $\mu=4$, calculado para *400* iteraciones y partiendo de *P(0) = (0.74,0.26)*, el coeficiente *resulta* $\ln\,\kappa = 0{,}69457843 > 0$, por lo tanto dos

trayectorias se separan con el tiempo de modo exponencial, y, en consecuencia la serie temporal que representa el valor de $x_1(t)$ es caótica.
Un análisis más detallado puede encontrarse en Anchorena, S. y Cases, B., 2003.

9. Conclusiones

En este trabajo se ha presentado un refinamiento de los juegos bipersonales, que, además de permitir modelar todos los juegos clásicos, permite ampliar el alcance al modelado de juegos con externalidades al incluir los efectos posibles sobre una estrategia de todos los enfrentamientos posibles en el juego.
Se ha presentado un ejemplo sencillo de un juego *2x2*, y se ha mostrado cómo el mismo, a partir del uso de replicadores orientados a la estrategia, que, al incluir externalidades, presenta dinámicas que pueden ir desde el equilibrio estable, inestable o indiferente hasta el caos, dinámica en la cual coexisten las dos estrategias pero no se llega nunca al equilibrio, presentando la composición de la población fluctuaciones aperiódicas e irregulares.
La inclusión de *Predadores* que logran su eficacia biológica a partir de enfrentamientos con la estrategia del *Luchador*, permite lograr versiones discretas de las ecuaciones de Lotka-Volterra (Lotka, 1925, Volterra, 1926), que son otro ejemplo de fluctuaciones aperiódicas en la composición de las poblaciones.
Por otra parte, tanto la presencia de externalidades en las actividades económicas, como las fluctuaciones aperiódicas e irregulares en las series temporales, son por demás frecuentes tanto en Economía como en Biología, resulta entonces interesante una herramienta que permita modelar este tipo de comportamiento.
Si bien la extensión del presente trabajo no permite desarrollar otras aplicaciones de los *Replicadores Orientados a la Estrategia*, algunas de ellas se presentan en Anchorena (2003) e incluyen dinámicas de tipo autocatálitico, donde la proporción de una determinada estrategia en el interior de la población, tiene efectos sobre su propia tasa de reproducción.
En cualquier caso, la Economía parece ser un campo fértil para la aplicación y la exploración de este instrumento, éste trabajo fue solo una presentación en sociedad.

10. Bibliografía:

Anchorena, S., 2003. Teoría de Juegos y Sistemas de Eco-Grmáticas en la simulación de Sistemas Complejos Adaptativos, EHU-UPV, San Sebastián.

Anchorena, S. and Cases, B., 2003. Modeling Chaotic Series by Simple Eco-Grammar Systems with Reproduction, Death and Maturation of Agents. Grammars, Volume 6, Number 3, Springer-Verlag, London, 155 - 168

Attanasio, O., Carroll, C., and Rios-Rull, J., 2005. Consumption, in NBER Website, "Economic Fluctuations and Growth." http://www.nber.org/programs/efg/efg.html (fecha de consulta 08-26-2005).

Cases, B., and Anchorena, S., 2005. “Strategy oriented evolutionary games: towards a grammatical models of games”. In: in Grana, M.; Duro, R.; d'Anjou, A.; Wang, P.P. (Eds.), Information Processing with Evolutionary Algorithms From Industrial Applications to Academic Speculations. Springer-Verlag, London, 285-304.

Goodwin, R. M., 1990. Chaotic Economic Dynamics. Oxford University Press, Oxford.

Jones C. and Klenow, P, 2005. Economic Growth, in NBER Website, "Economic Fluctuations and Growth." http://www.nber.org/programs/efg/efg.html (fecha de consulta 08-26-2005).

Klenow, P. and Rodríguez, A., 2005. "Externalities and Growth". Forthcoming in the Handbook of Economic Growth.

Lewontin, R., 1961. Evolution and the Theory of Games. Journal of Theoretic Biology 1:382-403.

Lotka, A., 1925. Elements of Physical Biology, Williams & Wilkins, Baltimore.

May, R., 1976. Simple Mathematical Models with very complicated dynamics. Nature, vol. 261, 459-475

Maynard Smith, J. y G. Price, 1973. The logic of animal conflict. Nature, Nº 246, 15-18

Maynard Smith, J., 1974. Models in Ecology. Cambridge University Press, Cambridge (Eng.).

Maynard Smith, J., 1978. The evolution of behaviour. Scientific American 239: 176-91.

Maynard Smith, J., 1982. Evolution and Theory of Games. Cambridge University Press. Cambridge MA.

Maynard Smith, J., 1984. “Optimization Theory in Evolution”. In: E. Sober (ed.), Conceptual Issues in Evolutionary Biology, MIT Press, Cambridge MA y London, 290-315.

Maynard Smith, J., 1988. “Can a Mixed Strategy be Stable in a Fnite Population?”. Journal of Theoretic Biology Nº 130, 247-251

Maynard Smith, J., 1989. Evolutionary genetics. Oxford University Press, Oxford.
Montero, F. y Morán, F., 1992. Biofísica: procesos de autoorganización en biología. Eudema, Madrid.
Peters, E., 1994. Fractal Market Analysis: Applying Chaos Theory to Investment and Economics. John Wiley & Sons, New York
Peters, E., 1996. Chaos and Order in the Capital Markets: A New View of Cycles, Prices, and Market Volatility. John Wiley & Sons, New York,
Peters, E., 1999. Patterns in the Dark: Understanding Risk and Financial Crisis with Complexity Theory. John Wiley & Sons, New York.
Peters, E., 2001. Complexity, Risk, and Financial Markets. John Wiley & Sons, New York.
Rogerson, R., 2005. "Sectoral Shocks, Specific Human Capital and Displaced Workers". Review of Economic Dynamics, Academic Press for the Society for Economic Dynamics, vol. 8(1), pages 89-105
Benabou, R., Durlauf, S., and Galor, O., 2005. Income Distribution and Macroeconomics. In: NBER Website, "Economic Fluctuations and Growth." http://www.nber.org/programs/efg/efg.html (fecha de consulta 08-26-2005).
Samuelson, L., 1998. Evolutionary Games and Equilibrium Selection. MIT Press, London.
Shimer, R., 2005. "The Cyclical Behavior of Equilibrium Unemployment and Vacancies". The American Economic Review, 95(1), pp. 25
Solé, R. and Manrubia, S., 1996. Orden y caos en sistemas complejos. Universidad Politécnica de Cataluña, Barcelona.
Volterra, V., 1926. "Variazioni e fluttuazioni del numero d'individui in specie animali conventi". In: en Memori Real Accademi Nazionalli dei Lincei, Ser VI, vol. 2
Von Neumann, J. y O. Morgenstern, 1944, Theory of Games and economic behavior. Princenton University Press. U.S.A.
Watson, M., and West, K., 2005. Forecasting and Empirical Methods in Macroeconomics and Finance, in NBER Website, "Economic Fluctuations and Growth." http://www.nber.org/programs/efg/efg.html (fecha de consulta 08-26-2005).
Weibull, J., 1996. Evolutionary Game Theory. MIT Press. Cambridge, MA.
Wikipedia, 2005. Externalities, en: Wikipedia, the free encyclopedia, http://en.wikipedia.org/wiki/Externality (fecha de consulta 09-09-2005)