CONCEPTOS PRELIMINARES DE SUAVIZADO Y PRONÓSTICO DE SERIES CRONOLÓGICAS CON HERRAMIENTAS DIFUSAS

Dr. Paulino E. Mallo; Cdora. María Antonia Artola; Cdor.Lic. Mariano Morettini; Cdor.Lic. Marcelo J. Galante; Cdor.Lic. Mariano E. Pascual; Cdor.Lic. Adrián R. Busetto; Lic. Alicia I. Zanfrillo

Universidad Nacional de Mar del Plata – Facultad de Ciencias Económicas y Sociales

RESÚMEN

El objetivo del presente trabajo es combinar distintas técnicas estadísticas con nuevas herramientas que proporciona la Matemática Borrosa, para el estudio de series cronológicas.

No se pretende un desarrollo exhaustivo del tema, sino que el principal objetivo es presentar la compatibilidad existente entre ambas disciplinas al estudiar temas cuantitativos en las ciencias sociales o exactas.

Se plantea por un lado el suavizado de una serie cronológica a través del método exponencial, introduciéndole las variantes que propone la Matemática Borrosa para los casos en que no pueda ser posible una cuantificación objetiva y precisa de la variable bajo análisis.

Por otro lado, se complementa el estudio de la serie con un pronóstico a largo plazo de la misma, para lo cual se expone el denominado Método Delphi Borroso.

Por último se presenta un caso de aplicación donde se desarrollan éstas herramientas, para luego extraer conclusiones.

PALABRAS CLAVES: <suavizado exponencial> <Matemática Borrosa> <Método Delphi> <Pronóstico> <Series cronológicas>

I. INTRODUCCIÓN

En el presente trabajo se pretende aplicar en forma introductoria el herramental de la lógica difusa y de la Matemática asociada al estudio de las series de tiempo.

Específicamente se escogió el método de suavizado de series denominado exponencial, introduciéndole algunas variantes al modelo original para aquellos casos en que la variable que se estudia no pueda ser cuantificada de manera precisa y objetiva. Esto puede deberse a diferentes circunstancias, como errores en la recopilación de datos, cambios en las técnicas de recolección y observación, incertidumbre inherente a la variable en cuestión, etc.

Cuando este es el caso, el herramental de la lógica difusa puede ser aplicado a fin de tratar el problema considerando sus dificultades, y no hacer caso omiso de ellos y aplicar la Matemática tradicional forzando las condiciones reales para que se asemejen a la situación precisa y certera de ésta última.

En una primera parte del trabajo se presenta el estudio de suavizado de una serie, exponiéndose el método llamado exponencial en condiciones de certeza, e introduciendo luego las adaptaciones necesarias para el caso de condiciones de incertidumbre, donde se incorpora la Matemática Borrosa.

En una segunda parte se complementa el estudio de la serie con pronósticos a largo plazo a través del denominado Método Delphi Borroso.

Una vez presentadas las distintas metodologías teóricas, se propone un caso práctico de aplicación de las mismas.

II. SUAVIZADO EXPONENCIAL[1]

II.a. SUAVIZADO EN CONDICIONES DE CERTEZA

El suavizado exponencial es una de las técnicas más utilizadas en las Series Cronológicas. Su objetivo es alisar una serie de forma de poder apreciar a simple vista el comportamiento normal de la serie y su tendencia, minimizando la influencia de outliers[2].

La metodología de alisado consiste en reemplazar la serie original por una nueva que presente oscilaciones menos pronunciadas. El valor de la nueva serie suavizada, representada por $\hat{Y}(t)$, dependerá del valor de la serie real de ese mismo período y del valor de la serie suavizada del período anterior. Más concretamente, se asignará una ponderación α al primer dato y una ponderación (1-α) al segundo. Así, será:

$$\hat{Y}(t) = \alpha Y(t) + (1-\alpha)\ \hat{Y}(t-1)$$

Siendo $\hat{Y}(0) = Y(0)$

[1] Se expone en este apartado el método de suavizado, alisado o atenuación exponencial en su versión más sencilla. Puede introducírsele un doble suavizado o complementarse con los aportes de Holt-Winters, entre otros.
[2] Para una aplicación a las ciencias económicas véase, por ejemplo, [Hanke, J. – Reitsch, A.; 1996]

Como puede apreciarse, la esencia del suavizado es una estimación por recurrencia, ya que el valor de $\hat{Y}(t)$ dependerá del valor de $\hat{Y}(t-1)$, el cual, a su vez, depende de $\hat{Y}(t-2)$, porque al aplicar la fórmula genérica quedará $\hat{Y}(t-1)$ = αY(t-1) + (1-α) $\hat{Y}(t-2)$, y así sucesivamente.

Haciendo los reemplazos correspondientes, quedará:

$$\hat{Y}(t) = \alpha Y(t) + (1-\alpha)\alpha Y(t-1) + (1-\alpha)^2\alpha Y(t-2) + \dots + (1-\alpha)^t Y(0)$$

De esta forma, lo que permite deducir la fórmula anterior es que cada valor de la serie suavizada representa una actualización del pasado, de manera que los valores más lejanos en el tiempo de la serie real tengan un peso geométricamente decreciente en el valor suavizado, ya que, como puede apreciarse, el valor suavizado de cada período contiene una porción de cada uno de los valores observados anteriores, constituyéndose en una serie de progresión geométrica decreciente de razón (1-α).

El valor de α, que estará comprendido entre 0 y 1, determinará cuánto peso se dará a los valores reales y cuánto a los suavizados.

Otra posible aplicación del método de suavizado exponencial es la predicción de corto plazo, que se puede extender sólo para un período. Así, el valor de predicción de la variable para el período (t+1) será:

$$\hat{Y}(t+1) = \alpha Y(t) + (1-\alpha)\ \hat{Y}(t)$$

Evidentemente, el valor que se asigne a α es crucial para alcanzar el objetivo que el investigador se proponga.

En un extremo, si α = 0, al sustituir en la fórmula de suavizado resultará que $\hat{Y}(t) = Y(0)$ porque el último término es el único que no está multiplicado por α. De esta forma, el suavizado que se logra es el máximo, todos los valores de la serie suavizada serán iguales entre sí e iguales al primer valor de la serie observada, eliminándose, en consecuencia, todas las oscilaciones de la serie observada. En contraposición, el pronóstico no será bueno, porque el valor pronosticado para el período (t+1) será *Y(0).*

En el otro extremo, si α = 1, cada uno de los valores suavizados coincidirá con el respectivo valor observado, no lográndose, en consecuencia, ningún suavizado, pero sí se conseguirá un mejor pronóstico, aunque debe tenerse presente que no se eliminarán de esta manera las componentes aleatorias.

Como puede deducirse fácilmente, al ser el método recurrente, se logra revisar constantemente los pronósticos a partir de nueva evidencia empírica observada para los últimos períodos.

II.b. SUAVIZADO EN CONDICIONES DE INCERTIDUMBRE[3]

Cuando la serie que se propone suavizar no presenta dificultades al momento de la observación de los datos, es decir, cuando disponemos de todos los valores *Y(t)* sin lugar a incertidumbres, el método puede ser aplicado tal como se describió anteriormente.

Sin embargo, no siempre la realidad nos entrega una serie vacía de dudas y variables susceptibles de perfecta y objetiva cuantificación. Piénsese, por ejemplo, en variables que posean incertidumbre inherente, como

---

[3] Puede consultarse, para un desarrollo más exhaustivo del método de suavizado exponencial en incertidumbre, [Kaufmann, A. – Gil Aluja, J., 1987]

la cuantificación de los bienes intangibles de las empresas, o en series que hayan sido obtenidas mediante técnicas poco confiables o que se hayan presentado dificultades en el momento de la observación de los fenómenos.

En estos y otros casos difícilmente podamos disponer de una serie confiable y, por lo tanto, el resultado de la aplicación de la técnica de suavizado exponencial no será bueno.

Se propone, en estos casos, la aplicación del herramental de la Matemática Borrosa para salvar estas dificultades y poder aplicar igualmente la técnica de suavizado, con algunas modificaciones que presentaremos más adelante.

Dentro de la vasta cantidad de formas en que se puede cuantificar una variable con herramental difuso, utilizaremos a los números borrosos triangulares (NBTs)[4], los cuales poseen 3 valores característicos: uno inferior, uno central y otro superior. Los valores inferior y superior acotan el lugar donde se encontrará el valor de la variable real, de manera que el experto (o los expertos) que determinen éstos valores característicos supondrán que es imposible que la variable en cuestión tome valores fuera del intervalo que forman los valores mínimo y máximo del NBT. El valor central, por su parte, es aquel valor del intervalo al cual el experto asignó máxima confianza.

Dado que la serie real estará compuesta por NBTs en lugar de valores precisos, los valores de la serie suavizada también estarán medidos en NBTs.

III. PRONÓSTICO DE LARGO PLAZO

El pronóstico que puede realizarse de una serie a partir del suavizado exponencial sólo sería admisible para un período, perdiendo fortaleza cuando se expande el umbral a pronosticar. Por esta razón, el estudio de la serie y su pronóstico de corto plazo pueden complementarse con otras herramientas más útiles para el pronóstico de largo plazo. En este trabajo proponemos el método Delphi borroso, apropiado para variables caracterizadas por su incertidumbre[5].

El método Delphi tradicional, que es clasificado por algunos autores como cualitativo[6], consiste en solicitar opinión de expertos acerca del comportamiento de una determinada variable en el futuro.

Las opiniones se relevan a través de cuestionarios sucesivos orientados a expertos que no se comunican entre sí, pero que van conociendo la opinión, en forma anónima, de los restantes encuestados a fin de que puedan rever sus opiniones para ajustarlas a las del resto.

El proceso termina cuando los investigadores consideran que se ha llegado a un cierto consenso.

La elección por nuestra parte del método Delphi para el pronóstico de largo plazo se debe a que es fácilmente adaptable a la aplicación del herramental borroso y a que los resultados que se obtienen agregando distintas opiniones de expertos en temas signados por la incertidumbre son sensiblemente superiores.

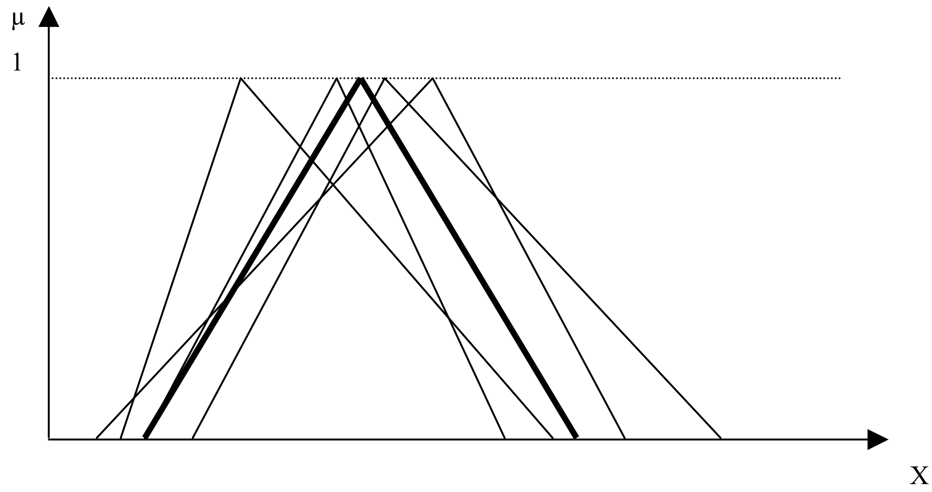
---

[4] No dedicaremos demasiado espacio a este tema por haberse expuesto en numerosos trabajos presentados por este mismo grupo en los Coloquios de la Sociedad Argentina de Estadística desde el año 2001. El lector interesado en profundizar en los temas de Matemática Borrosa puede consultar [Mallo y otros; 2004].

[5] Puede consultarse, al respecto, [Gil Lafuente, A.; 1990] y [Lazzari y Otros; 1998].

[6] Por ejemplo, [Uriel, E.; 1995].

Al introducir los NBTs al método Delphi, se le solicitará a cada experto que asigne un NBT al valor que considera tendrá la variable sub examine en el futuro. Por cada una de las opiniones de los expertos para cada período futuro tendremos un NBT, y de ellos podrá obtenerse uno representativo que denominaremos NBT medio. Así, si la cantidad de expertos consultados es cuatro, podremos realizar el siguiente gráfico:



La variable estudiada y el valor asignado por cada experto para cada uno de los períodos futuros se representa en el eje de abscisas y el nivel de confianza μ en ordenadas. Podrá realizarse un gráfico por cada período del horizonte temporal que se pronostique.

En el gráfico se encuentra el haz de NBTs propuestos por los cuatro expertos y, además, un NBT de trazo más grueso que es el número borroso medio, cuyos valores característicos son el promedio de los valores característicos de los NBTs considerados, es decir, el valor mínimo del NBT medio será el promedio de los cuatro valores mínimos de los NBTs propuestos, y así sucesivamente.

Una vez efectuada la primera ronda de respuestas, puede calcularse el NBT medio y obtenerse la distancia a él de cada una de las estimaciones.

Llamemos $\underset{\sim}{M}$ al NBT medio, el cual poseerá una función lineal que irá desde el valor mínimo –para un μ de 0- al valor medio –con un μ de 1. Denominaremos a dicha función $m_1(\mu)$. A su vez, también tendrá una función lineal $m_2(\mu)$ que irá desde el valor central hasta el máximo.

Análogamente cada uno de los NBTs propuestos por los expertos, también tendrán una función a la izquierda y otra a la derecha. Si llamamos $\underset{\sim}{A}$ al primer NBT propuesto, la distancia a la izquierda y a la derecha, respectivamente, con el NBT medio serán:

$$dI\left(\underset{\sim}{M},\underset{\sim}{A}\right)=\int_{\mu=0}^{1}\left[a_1(\mu)-m_1(\mu)\right]\partial\mu$$

y

$$dD\left(\underset{\sim}{M},\underset{\sim}{A}\right)=\int_{\mu=0}^{1}\left[a_2(\mu)-m_2(\mu)\right]\partial\mu$$

La suma de ambas distancias nos dará la distancia total de cada NBT al NBT medio.

Informando cuál fue el NBT medio y la distancia al mismo a cada experto, pueden efectuarse sucesivas ruedas para que cada uno revea su opinión. Este proceso puede repetirse una cierta cantidad de veces, la cual conviene que sea prefijada de antemano.

Si luego de algunas ruedas hay opiniones que siguen quedando alejadas del NBT medio, conviene analizar las causas.

Una vez finalizado el proceso, se toma el NBT medio como estimación definitiva del pronóstico de la serie.

IV. CASO DE APLICACIÓN

Para lograr una mayor comprensión de los temas aquí tratados propondremos un caso de aplicación para el suavizado y el pronóstico de una serie.

Supongamos que la variable a estudiar es el incremento en las capacidades de los trabajadores del sector tecnológico argentino originado en los esfuerzos de capacitación de los empleadores.

Para cuantificar esta variable podría considerarse el valor actual de los incrementos en los flujos de fondos futuros que originará la mencionada capacitación[7].

Claramente, la incertidumbre inherente a la variable en cuestión y la imposibilidad de asignar un número preciso al valor de la variable en los distintos períodos torna adecuada la utilización de la Matemática Borrosa.

Aplicaremos primero la técnica del suavizado, considerando, para simplificar, que los períodos pasados contemplados son sólo seis, y que los valores asignados a la serie, en miles de pesos, son:

$Y(0) = (3000; 5000; 8000)$
$Y(1) = (4500; 7000; 7500)$
$Y(2) = (5000; 7500; 8500)$
$Y(3) = (2500; 3000; 3500)$
$Y(4) = (4000; 5500; 7000)$
$Y(5) = (5500; 6000; 6500)$

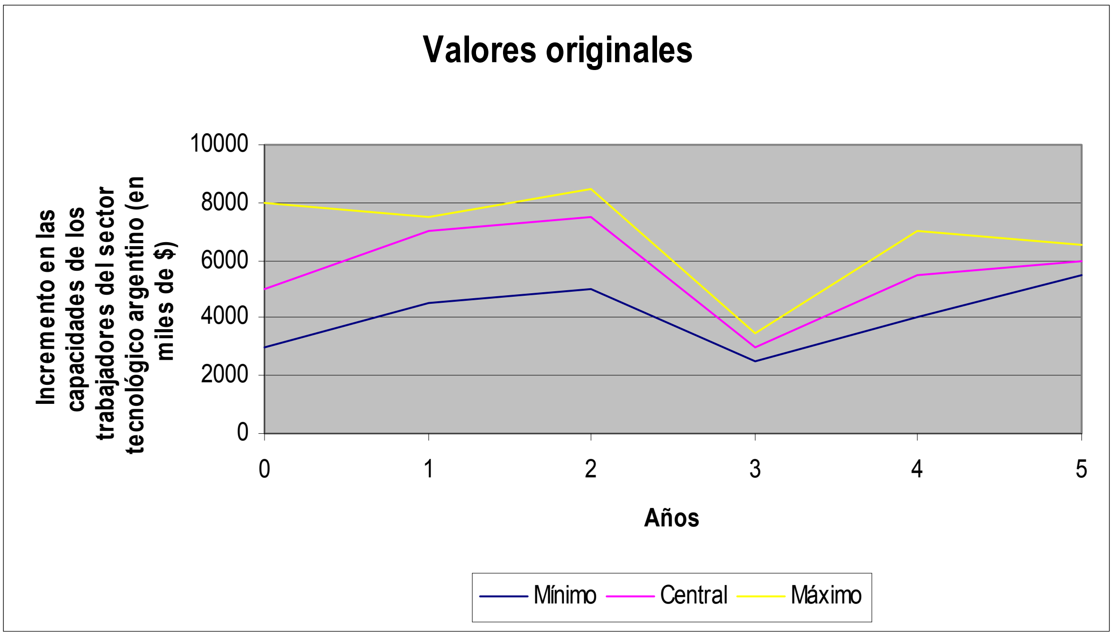
Podemos graficar estos cinco valores de la siguiente manera: en el eje de abscisas se representan los distintos períodos sobre los cuales el experto emitió una opinión, esto es, los períodos 0 a 5; y en el eje de ordenadas se representan los valores inferior, central y superior de cada uno de los NBTs informados por el experto.

Para cada opinante serán tres los valores a graficar, y deberán unirse todos los valores superiores, todos los inferiores y todos los centrales.

En el gráfico siguiente puede apreciarse el resultado.

---

[7] Véase, por ejemplo, [Mallo y otros; 2000].



Y aplicando un suavizado para α=0.4, tendremos los siguientes valores:

$$\hat{Y}(0) = (3000;5000;8000)$$

$$\hat{Y}(1) = (3600;5800;7800)$$

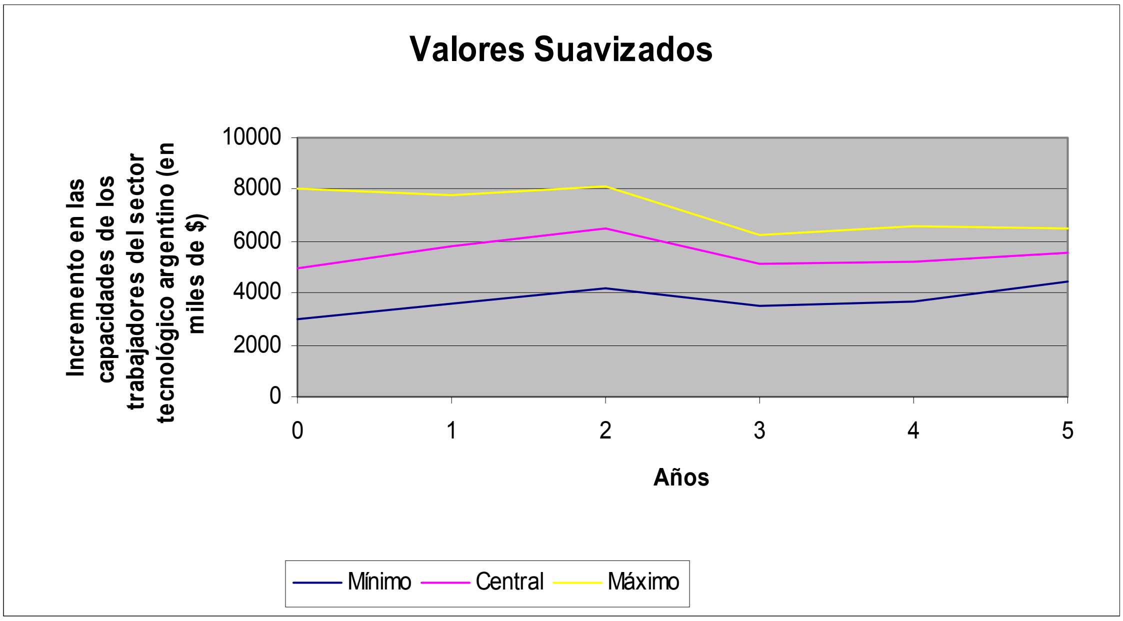
$$\hat{Y}(2) = (4160;6480;8080)$$

$$\hat{Y}(3) = (3496;5088;6248)$$

$$\hat{Y}(4) = (3698;5253;6549)$$

$$\hat{Y}(5) = (4419;5552;6529)$$

Y gráficamente:



Si nuestro objetivo es pronosticar para el período siguiente, lo más conveniente sería, a partir del método de suavizado exponencial, tomar un valor de α cercano a la unidad, por ejemplo, 0,8. De esta manera, el valor estimado para el período 6 sería: $\hat{Y}(6) = (5432;5967;6500)$

Pero, para continuar con el análisis que se venía haciendo a partir de α = 0.4, el valor pronosticado para el período siguiente sería:

$\hat{Y}(6) = (4851;5731;6518)$

Supongamos, a su vez, que se pretende continuar la serie de pronósticos para valores más lejanos del primer período posterior del cual se disponen datos.

La variable que se está estudiando posee incertidumbre inherente, en el sentido de que no puede ser objeto de una cuantificación precisa por su naturaleza misma. Si a este hecho sumamos la carga de incertidumbre que conlleva toda estimación de valores futuros, concluimos que un método apropiado para la tarea de pronóstico de la serie sería el Delphi Borroso.

Así, se consulta a cinco expertos acerca del valor que podría tomar la variable en los períodos t+2 a t+5.

Supongamos que la opinión de los mismos fue:

Perìodo t+2:

Experto A: [5700; 6200; 6650]
Experto B: [5500; 6000; 6400]
Experto C: [5650; 6300; 6400]
Experto D: [5100; 5700; 6000]
Experto E: [5900; 6500; 6850]

Perìodo t+3:

Experto A: [5800; 6200; 6700]
Experto B: [5550; 6100; 6400]
Experto C: [5850; 6550; 6750]
Experto D: [5200; 5750; 6150]
Experto E: [6100; 6750; 7050]

Período t+4:

Experto A: [5800; 6300; 7000]
Experto B: [5650; 6200; 6700]
Experto C: [5800; 6400; 6950]
Experto D: [5350; 5900; 6450]
Experto E: [6250; 6850; 7350]

Perìodo t+5:

Experto A: [5900; 6450; 7250]
Experto B: [5800; 6350; 7000]
Experto C: [5900; 6650; 7350]
Experto D: [5400; 6000; 6750]
Experto E: [6300; 7000; 7600]

A partir de las opiniones expuestas, los NBTs medios, que surgirán de promediar los valores inferior, central y superior de la opinión de cada uno de los expertos, serán los siguientes:

Perìodo t+2: [5570; 6140; 6460]
Perìodo t+3: [5700; 6270; 6610]
Perìodo t+4: [5770; 6330; 6890]
Perìodo t+5: [5860; 6490; 7190]

Esta información podría enviársele a aquellos expertos cuyas opiniones se alejaron sensiblemente de esta media, para que revisen sus opiniones y luego obtener nuevos NBTs medios.

V. CONCLUSIONES

Creemos haber logrado con el presente trabajo los objetivos propuestos al inicio del mismo. Estamos convencidos de la complementariedad existente entre la Teoría de las Probabilidades, la Estadística y las herramientas propuestas por la Matemática Borrosa.

Las situaciones observadas en el mundo real no responden, a veces, a los modelos matemáticos y estadísticos existentes. En estos casos no debe forzarse la realidad a fin de que pueda aplicarse el modelo conocido para luego extraer conclusiones haciendo caso omiso de aquellas suposiciones, sino que lo que corresponde es adaptar los modelos a la realidad observada.

Lo que presentamos en este trabajo es un ejemplo de este accionar. Cuando se estudia una variable cuyos valores observados no pueden ser cuantificados de una manera precisa, es conveniente asignarles rangos de valores, y allí es donde cobra importancia la Matemática Borrosa.

En la variable que consideramos al presentar el caso de aplicación, la cuantificación precisa es muy dificultosa, cuando no imposible. Para poder efectuar el alisado de la serie, sugerimos utilizar el método exponencial, con las adaptaciones necesarias al caso de cuantificación con números borrosos.

A su vez, para el pronóstico de la serie proponemos el método Delphi, al cual también le hemos introducido reformas a fin de adaptarlo al caso de cuantificación borrosa.

VI. REFERENCIAS

[Gil Lafuente, A.; 1990] *El análisis financiero en la incertidumbre*; Abril; Barcelona.

[Hanke, J. – Reitsch, A.; 1996] *Pronósticos en los negocios*; 5º edición; Prentice Hall; México.

[Kaufmann, A. – Gil Aluja, J., 1987] *Técnicas operativas de gestión para el tratamiento de la incertidumbre*; Editorial Hispano Europea; Barcelona.

[Lazzari y Otros; 1998] *"Aplicaciones de la Matemática Borrosa a temas de Gestión y Economía"*; Cuaderno Nº 1 del CIMBAGE; Universidad de Buenos Aires.

[Mallo y otros; 2000] "El estado de valor estratégico"; Anales del VII Congreso de la Sociedad Internacional de Gestión y Economía Fuzzy; Creta.

[Mallo y otros; 2004] *Gestión de la incertidumbre en los negocios. Aplicaciones de la Matemática Borrosa*; RIL editores, Editorial Melusina; Santiago de Chile.

[Uriel, E.; 1995] *Análisis de series temporales. Modelos ARIMA*; Paraninfo; Madrid.