DECISIONES FINANCIERAS CON PROGRAMACIÓN LINEAL:

DIFERENTES ESTADOS DE LA NATURALEZA

Paulino E. MALLO, María A. ARTOLA, Mariano MORETTINI

Grupo de Investigación Matemática Borrosa

Facultad de Ciencias Económicas y Sociales

Universidad Nacional de Mar del Plata

mariano.morettini@gmail.com

RESUMEN

Desde los inicios de la investigación operativa la programación lineal ha sido una de sus herramientas más eficientes y difundidas. En el campo financiero también se ha dado lugar a la aplicación de la programación lineal, aunque con menos frecuencia que en la faz productiva. Sin embargo, los supuestos de la programación lineal no siempre se satisfacen acabadamente en la realidad. Algunas de las situaciones enfrentadas son de certeza, satisfaciendo los supuestos que requiere la técnica, pero también hay situaciones de riesgo o de incertidumbre. Estos últimos dos estados de la naturaleza requieren adaptaciones a los conceptos originales de la programación lineal para su aplicación concreta, mediante la teoría de las probabilidades en el caso del riesgo, y mediante la matemática difusa, en el caso de la incertidumbre.

En el presente trabajo se plantea resumidamente el modelo clásico de programación lineal, para luego incorporar la teoría de las probabilidades en su análisis y abordar situaciones de aleatoriedad, y por último hacer uso de las técnicas difusas para el tratamiento de la incertidumbre.

PALABRAS CLAVE: programación lineal, decisiones financieras, matemática difusa

SUMARIO

1. INTRODUCCIÓN

La programación lineal es una de las principales herramientas de la investigación operativa, pero de utilización también en diferentes tópicos de decisiones financieras.

Toda decisión financiera se realiza para maximizar una función objetivo, generalmente relacionada con la rentabilidad o utilidades, debiendo respetar determinados requerimientos de espacio físico, o inversión, o tiempos, entre otros recursos, con lo que a partir de estas condiciones es viable la aplicación de la programación lineal.

Es generalizada la atribución del desarrollo inicial de la programación lineal a George Stigler y a George Dantzig, en la segunda mitad de la década del ´40 del siglo pasado. Sin embargo, tal como lo indica Fernandez López (2003), el profesor José Barral Souto, español de nacimiento pero con desarrollo intelectual en Argentina, anticipó desde la UBA los cimientos de la programación lineal casi diez años antes. De hecho, el propio Wassily Leontief le escribió una carta en 1961 al entonces decano de la Facultad de Ciencias Económicas de la UBA, William Leslie Chapman, solicitando autorización para reproducir un artículo de Barral Souto de 1941 en el que "...en esencia anticipó la aplicación de la programación lineal a la teoría económica".

Entre los supuestos de la programación lineal, como veremos, se encuentra la certeza respecto de la función objetivo y los requerimientos a satisfacer. Sin embargo, sabido es que existen tres estados de la naturaleza, a saber, certeza, riesgo e incertidumbre.

En un ambiente de certeza, no hay duda respecto de los parámetros que definen las funciones explicativas del objetivo a alcanzar o de las restricciones impuestas. En estos casos se aplica sin adaptaciones la programación lineal clásica.

En un ambiente de riesgo, no todos los parámetros o datos son conocidos, pero es factible tratarlos como una variable aleatoria, es decir, identificar los posibles valores que pueden tomar las variables y asignarles una probabilidad a cada uno de ellos. El agregado que corresponde hacerle al modelo clásico es la aplicación de la teoría de las probabilidades.

Si, en cambio, la situación que afrontamos es de incertidumbre, esto es, no somos capaces de definir una variable aleatoria con probabilidades asignadas a cada valor de las variables, debemos incorporar la matemática difusa.

Lo que presentamos en este trabajo es el modelo tradicional de programación lineal con algún agregado por incorporación de la teoría de las probabilidades, para luego aplicar un modelo de decisión difuso que reemplace a la programación lineal clásica ante estados de la naturaleza inciertos.

2. LA PROGRAMACIÓN LINEAL EN SITUACIONES DE CERTEZA

La programación lineal se aplica para dar solución a problemas en los que debe maximizarse o minimizarse una función lineal, que se denomina función objetivo, sujeta a restricciones representadas por inecuaciones también lineales.

En términos formales:

$$Z = C_1X_1 + C_2X_2 + \ldots + C_nX_n \qquad (1)$$

Sujeto a:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \ldots + a_{1n}X_n &\leq b_1 \\ a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \ldots + a_{2n}X_n &\leq b_2 \\ a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + \ldots + a_{mn}X_n &\leq b_m \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

y a las condiciones de no negatividad:

$$X_2, X_2, \ldots, X_n \geq 0 \qquad (3)$$

El propósito es maximizar (o minimizar, según el caso) la función objetivo Z representada por (1), siempre que se cumplan las condiciones o requerimientos que establece el bloque de inecuaciones representadas por (2), tomando las variables valores no negativos, como lo requiere la inecuación (3).

Tomemos un ejemplo numérico referido a la administración de la producción a fin de aplicar estos conceptos.

Supongamos que una empresa fabrica dos productos distintos, para lo que utiliza un único proceso productivo y una única materia prima. La capacidad de trabajo de la planta es de 18.400 horas como máximo y se dispone de 16.000 kg. de materia prima, no pudiendo ampliarse en una primera etapa por cuestiones financieras. El producto A requiere 4,4 horas de procesamiento y 4 kg. de materia prima por unidad, mientras que el producto B utiliza un 20% menos de tiempo y un 15% más de material por unidad. Además, por cuestiones comerciales se requiere que A no tenga una participación superior al 80% de la producción total y que B no supere el 40% de la producción total. Se sabe también que las contribuciones marginales de los productos son \$16 para A y \$9 para B.

A partir de esta información tenemos que la función objetivo a maximizar será la referida a las utilidades, y se representará por:

$$Z = 16\ A + 9\ B$$

Y los requerimientos serán

$$4{,}4\ A + 3{,}52\ B \leq 18.400$$

$$4\ A + 4{,}6\ B \leq 16.000$$

$$1{,}5\ B \leq A \leq 4\ B$$

$$A;\ B \geq 0$$

Esta situación puede representarse gráficamente como se muestra a continuación, en la Figura 2.1.

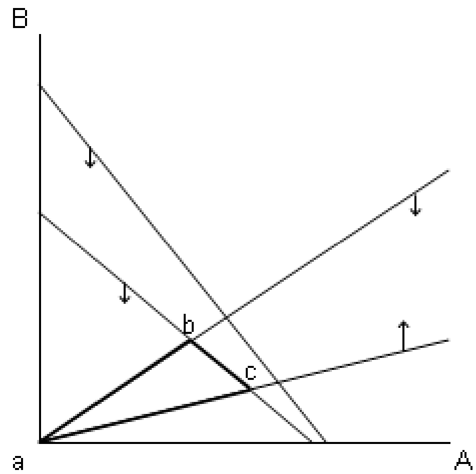

Figura 2.1

Como puede observarse, en el eje de ordenadas se representan las cantidades producidas de B, en el eje de abscisas las cantidades producidas de A y las funciones lineales representan los requerimientos del enunciado.

Las dos funciones lineales que parten del origen determinan los requerimientos máximos de A y B, según lo indicado en la tercera restricción. La inferior presenta una flecha hacia arriba indicando que se trata de una desigualdad que se cumple para todo punto por encima de ella, mientras que la superior presenta una flecha hacia abajo indicando que todo punto por debajo de ella cumple con la inecuación.

Las otras dos funciones presentan requerimientos máximos de capacidad de tiempo (la más alejada al origen) y de materias primas (la restante), con lo que para cumplir con ellas debe fijarse una combinación de productos que se encuentre debajo de las mismas.

Para satisfacer todas las condiciones, entonces, las combinaciones posibles se encuentran dentro del triángulo abc.

Puede demostrarse matemáticamente, aunque no lo haremos aquí en honor a la brevedad, que el punto óptimo es uno de los vértices del polígono que se forma al cumplir todas las restricciones.

En nuestro ejemplo, los vértices son los puntos a, b y c. Obviamente, el punto a se descarta por no haber producción alguna en el mismo. Veremos entonces las utilidades de los puntos b y c.

En el punto b se producen 2264,15 unidades de A y 1509,43 unidades de B, valores que se obtienen a partir de las desigualdades que se intersectan en ese punto. Como la cantidad producida de ambos productos debe ser un número natural, la contribución marginal total obtenida será:

$$Z = 16 * 2264 + 9 * 1509 = 49.805$$

En el punto c, por su parte, se producen 3106,80 unidades de A y 776,70 unidades de B, con lo que la contribución marginal total será:

$$Z = 16 * 3106 + 9 * 776 = 56.680$$

Claramente, en el punto c se obtiene una mayor utilidad, por lo que esa será la combinación óptima que maximiza la función objetivo cumpliendo con todas las restricciones impuestas.

Además de la forma gráfica de solución de estos problemas de programación lineal, puede utilizarse el método Simplex, que es un algoritmo útil no sólo para situaciones donde hay sólo 2 variables a definir, sino que puede extenderse esta cantidad sin inconvenientes, situación no viable en el método gráfico.

También pueden resolverse estos problemas mediante la utilización de la herramienta Solver de Microsoft Excel, pero dejaremos estos puntos sin desarrollo por cuanto no resultan de mayor interés para nuestro trabajo actual.

Debemos llamar la atención en este punto al hecho de que, si bien el caso planteado es un típico problema de programación lineal aplicado a cuestiones de producción, no sólo puede aplicarse también esta herramienta a problemas financieros, sino que, como en este caso, puede ser un insumo para posteriores decisiones financieras.

Por ejemplo, para la elaboración del presupuesto financiero debe previamente generarse el presupuesto de ventas, el de producción y el de compras, entre otros. La elaboración del presupuesto de producción se realiza sobre la base de la cantidad de productos a producir, al igual que el presupuesto de compras, con lo que la aplicación de la programación lineal resulta útil para generar el dato insumo de un presupuesto base para el presupuesto financiero.

Por otra parte, y tal como se verá más adelante, también es dable la aplicación directa de la programación lineal para la toma de decisiones financieras.

3. LA PROGRAMACIÓN LINEAL EN SITUACIONES DE RIESGO

Como habrá advertido el lector, tal como se expuso el problema de la programación lineal en el punto anterior, todos los requerimientos y la función objetivo resultan de parámetros perfectamente conocidos por quienes deben tomar las decisiones, situación no siempre verificada en la normalidad de los negocios, por cuanto es deseable tratar de no forzar las situaciones de riesgo o incertidumbre para modelizarlas como si hubiera certeza.

Tal como lo anticipáramos en la introducción, existen tres estados de la naturaleza, dependiendo del grado de conocimiento que se tenga sobre la situación enfrentada. No siempre la certeza es la que reina, con lo que, cuando no es así, es necesario modificar las herramientas de las que se dispone para su tratamiento adecuado.

Al respecto, James C. T. Mao[1] plantea un método propuesto por Allen R. Ferguson y George B. Dantzig para resolver casos en los que la demanda de los productos se establece como una variable aleatoria.

---

[1] Mao, James C. T. (1986). *Análisis financiero*. 4º edición. Buenos Aires. El Ateneo. Págs. 81 a 84.

Así, supongamos que los precios de venta de los productos A y B son \$3 y \$5 respectivamente, con costos variables de producción de \$1 y \$2, respectivamente y siendo la cantidad demandada de cada producto para los precios dados los descriptos en la Tabla 3.1.

Producto A		Producto B	
Unidades	Probabilidad	Unidades	Probabilidad
0-2	0,3	0-1	0
3-6	0,4	2-4	0,3
7-8	0,3	5-7	0,6
		8	0,1

Tabla 3.1

Suponiendo que dentro de cada bloque la probabilidad se distribuye uniformemente, habrá un 10% de probabilidad de que no se venda ninguna unidad de A para el precio actual, y esta probabilidad permanecerá constante para A=1 y A=2.

Así, si hay un 10% de probabilidades de que no se venda ninguna unidad de A, habrá un 90% de probabilidades de que se venda al menos 1 unidad. Si se produce sólo una unidad y no se vende, se tendrá una pérdida de \$1 (que es el costo variable que le corresponde), siendo la probabilidad de que esto suceda del 10%. Si se produce sólo una unidad y ésta se vende, generará una contribución marginal de \$2, con una probabilidad de 90%. La esperanza matemática de vender una unidad será, entonces, $E(x) = 0,1 * (-1) + 0,9 * 2 = 1,70$. Siguiendo idéntico razonamiento podemos generar la Tabla 3.2 para las unidades 1 a 8.

Unidad	Cálculo	E(x)
1	0,1 * (-1) + 0,9 * 2	1,70
2	0,2 * (-1) + 0,8 * 2	1,40
3	0,3 * (-1) + 0,7 * 2	1,10
4	0,4 * (-1) + 0,6 * 2	0,80
5	0,5 * (-1) + 0,5 * 2	0,50
6	0,6 * (-1) + 0,4 * 2	0,20
7	0,7 * (-1) + 0,3 * 2	-0,10
8	0,85 * (-1) + 0,15 * 2	-0,55

Tabla 3.2

El primer intervalo incluye a las unidades 1 y 2, por lo que en promedio la esperanza matemática del intervalo será 1,55 [(1,70 + 1,40) / 2], el segundo intervalo tendrá una esperanza media de 0,65 y en el tercero de -0,33.

Para el producto B la esperanza del primer intervalo será 3, la del segundo intervalo 2,50, la del tercer intervalo 0,50 y la del cuarto intervalo -1,50.

De esta manera, la función objetivo será:

$$Z = 1{,}55\ A_1 + 0{,}65\ A_2 - 0{,}33\ A_3 + 3\ B_1 + 2{,}50\ B_2 + 0{,}50\ B_3 - 1{,}50\ B_4$$

El problema será maximizar esta función, sujeta a las restricciones financieras, de capacidad, legales, etc. que se establezcan, para lo cual se aplican los procedimientos antes mencionados, sean gráficos o algorítmicos.

4. LA PROGRAMACIÓN LINEAL EN SITUACIONES DE INCERTIDUMBRE

Aún cuando en el apartado anterior se flexibilizaron las condiciones de certeza inherentes al modelo clásico de programación lineal, no siempre presentes en cuestiones financieras, y si bien es cierto que hemos desarrollado apenas alguna de las introducciones de la teoría de las probabilidades al tema que nos convoca, también es cierto que en muchas oportunidades estas ampliaciones o adaptaciones del modelo no resultan suficientes.

Basados en la lógica difusa y la matemática consecuente, Bellman y Zadeh han preparado un modelo en 1970 donde la función objetivo y las restricciones son difusas. En ese modelo, los objetivos se representan por $\tilde{G}_i$ y las restricciones por $\tilde{C}_j$, con funciones de pertenencia $\mu_{\tilde{G}_i}(x)$ y $\mu_{\tilde{C}_j}(x)$ respectivamente. La decisión $\tilde{D}$ será el conjunto borroso intersección de los objetivos $\tilde{G}_i$ sujeto a las restricciones $\tilde{C}_j$, con función de pertenencia:

$$\mu_{\tilde{D}}(x) = \min\left\{\mu_{\tilde{G}_1}, \mu_{\tilde{G}_2}, ..., \mu_{\tilde{G}_m}, \mu_{\tilde{C}_1}, \mu_{\tilde{C}_2}, ..., \mu_{\tilde{C}_n}\right\} \qquad (4)$$

La solución del problema será maximizar la función objetivo, es decir:

$$\max \mu_{\tilde{D}}(x) = \max \min\left\{\mu_{\tilde{G}_1}, \mu_{\tilde{G}_2}, ..., \mu_{\tilde{G}_m}, \mu_{\tilde{C}_1}, \mu_{\tilde{C}_2}, ..., \mu_{\tilde{C}_n}\right\} \qquad (5)$$

Veamos un caso de aplicación para clarificar conceptos. Supongamos que un inversor está analizando la posibilidad de invertir en alguno de entre 4 proyectos distintos identificados en (6), buscando tener una buena rentabilidad:

$$X = \{p_1, p_2, p_3, p_4\} \qquad (6)$$

A su vez, se pretende que cada proyecto cumpla con las siguientes restricciones: $\tilde{C}_1$ es "escasa inversión inicial"; $\tilde{C}_2$ es "recupero de la inversión cercano en el tiempo"; $\tilde{C}_3$ es "conexidad con otros negocios de la empresa" y $\tilde{C}_4$ es "innovación en el proyecto".

Es decir, entonces, que lo que se busca maximizar es la rentabilidad del proyecto, denotada por $\tilde{G}$. Pero se prefieren los proyectos que menor inversión inicial requieran, que generen fondos que permitan recuperar dicha inversión lo antes posible, que se trate de un proyecto conexo a las actuales actividades de la empresa y que sea innovador.

El grado en que cada uno de los proyectos cumple con el objetivo buscado y con los requisitos impuestos, según estudios encarados por el evaluador, se representan a continuación:

$$\tilde{G} = \{(p_1;0{,}7)\ ,\ (p_2;0{,}4)\ ,\ (p_3;0{,}6)\ ,\ (p_4;0{,}8)\}$$

$$\tilde{C}_1 = \{(p_1;0{,}8)\ ,\ (p_2;0{,}5)\ ,\ (p_3;0{,}8)\ ,\ (p_4;0{,}8)\}$$

$$\tilde{C}_2 = \{(p_1;0{,}5)\ ,\ (p_2;0{,}7)\ ,\ (p_3;0{,}4)\ ,\ (p_4;0{,}7)\}$$

$$\tilde{C}_3 = \{(p_1;0{,}7)\ ,\ (p_2;0{,}6)\ ,\ (p_3;0{,}3)\ ,\ (p_4;0{,}7)\}$$

$$\tilde{C}_4 = \{(p_1;0{,}6)\ ,\ (p_2;0{,}5)\ ,\ (p_3;0{,}9)\ ,\ (p_4;0{,}6)\}$$

Podríamos interpretar algunos valores para clarificar conceptos. El primer proyecto, por ejemplo, posee una rentabilidad media-alta (μ=0,7), cumple en gran medida el requisito de escasa inversión inicial (μ=0,8), el recupero de la inversión en el tiempo es relativamente lento (μ=0,5), el proyecto tiene conexidad con los actuales negocios de la empresa (μ=0,7), y si bien es innovador, no lo es en gran medida (μ=0,6).

Para escoger el proyecto aplicamos, entonces, (4) y escogeremos el menor valor de pertenencia de cada proyecto en cada restricción y en el objetivo:

$$\tilde{D} = \{(p_1;0{,}5)\ ,\ (p_2;0{,}4)\ ,\ (p_3;0{,}3)\ ,\ (p_4;0{,}6)\}$$

Así, el cuarto proyecto sería el que correspondería elegir, por cuanto posee el mayor valor de pertenencia en el conjunto $\tilde{D}$, es decir, cumple con todos los requisitos en por lo menos grado 0,6, mientras que los otros proyectos cumplen en menor grado en por lo menos un requisito o en el objetivo.

Cabe aclarar que este es un ejemplo sencillo que no distingue preferencias entre los requerimientos (se consideró que todos son igualmente importantes para el inversor) y se presentan los valores como dados, siendo que en la realidad su obtención no resulta tan sencilla. Es que no deberían surgir de la simple apreciación del inversor, sino de la conjunción de opiniones de expertos en el tema, como gerentes o consultores, que apliquen a su vez técnicas diversas de gestión, tanto difusas como tradicionales, entre las que el V.A.N. o la T.I.R. podrían destacarse.

En trabajos anteriores nos ocupamos sobremanera de estos temas, por eso es que en esta oportunidad nos remitimos a ellos con el objeto de no cansar la lectura y extender en demasía el trabajo.

5. CONCLUSIONES

Como venimos exponiendo en diferentes trabajos desde hace más de diez años en estas Jornadas, la Matemática Difusa o Borrosa resulta una herramienta innovadora en la resolución de problemas empresariales ligados con la matemática o administración financiera, que no exige forzar las situaciones de la realidad para su adaptación a los supuestos que los modelos matemáticos clásicos llevan implícitos.

Tampoco es el objetivo desechar dichos modelos, por cuanto han sido y continúan siendo de gran utilidad teórica y práctica, sino por el contrario rescatar de ellos la mayor cantidad posible de conceptos y adaptarlos a situaciones que no cumplen acabadamente con las premisas que les dieron origen, con el fin ampliar su potencia y de obtener resultados más acordes en cada caso.

En cuanto al tema que nos ocupa en el presente trabajo, la programación lineal generalmente se vincula con el área productiva de una empresa, siendo que en el área financiera también puede ser utilizada con buenos resultados. Se ha tratado en estas páginas de recuperar esos conceptos y aplicarles técnicas probabilísticas y difusas para su adaptación a diferentes escenarios.

La utilidad de esta herramienta desarrollada por Bellman y Zadeh con los principios de la programación lineal, es doble: por un lado, permite la aplicación de técnicas de gestión a ambientes inciertos, y por otro, se constituye en una alternativa a las técnicas tradicionales de evaluación de proyectos de inversión. No es que el valor tiempo del dinero no esté presente en la metodología presentada, sino que la misma está implícita en los valores de pertenencia de los distintos proyectos al objetivo buscado.

Cuando se asigna un grado de pertenencia de cada proyecto al objetivo “rentabilidad”, dicho grado se asigna previa aplicación de modelos que utilizan la matemática financiera, como el V.A.N. y la T.I.R., ya que son las herramientas aptas para definir la rentabilidad de los proyectos. Estas mismas técnicas pueden aplicarse con técnicas borrosas, como lo hemos presentado en trabajos anteriores. La novedad de las técnicas que presentamos ahora consiste en dar solución a planteos en los que no es sólo la rentabilidad lo que el empresario busca, sino también el cumplimiento de otros requisitos técnicos, legales, financieros, o de otra índole.

No pretende este trabajo arrojar luz sobre temas aún no tratados en la comunidad científica internacional, sino simplemente hacer un breve raconto de las posibilidades que estas técnicas ofrecen, y que por supuesto pueden ser ampliadas en lo sucesivo.

Esta modesta introducción al estado del arte en el tema en cuestión pretende ser ampliada por los autores en posteriores trabajos, a la vez que investigar sobre nuevas formas de tratamiento de situaciones con técnicas difusas, y su complementariedad con técnicas tradicionales.

BIBLIOGRAFÍA CONSULTADA

Association Française des Conseils en Organisation Scientifique (1964). *Investigación Operativa y Organización.* Madrid. Aguilar.

Fernandez López, Manuel (2004). “Centenario de José Barral Souto, el genio gallego que anticipó la programación lineal”. *Revista Galega de Economía*. Vol. 13, Nº 1-2, pp. 1-11. Universidade de Santiago de Compostela.

Fernandez López, Manuel (2003). “Barral Souto at his centennial: his scientific contribution”. *The Journal of Management and Economics*. Vol. 7, Nº 7. Buenos Aires. Facultad de Ciencias Económicas, Universidad de Buenos Aires.

Lazzari, Luisa L. (2005). “Instrumentos económicos y de gestión aplicados a ambientes con alta incertidumbre”. Buenos Aires. s/e.

Lazzari, Luisa L.; Machado, Emilio A. M.; Pérez, Rodolfo H. (1998). *Teoría de la decisión fuzzy*. Buenos Aires. Macchi.

Mallo, Paulino E.; Artola, María A.; Pascual, Mariano E.; García, Mónica V.; Martínez, Diego. (2004). *Gestión de la incertidumbre en los negocios*. Santiago de Chile. RIL-Melusina.

Mao, James C. T. (1986). *Análisis financiero.* 4º edición. Buenos Aires. El Ateneo.

Munier, Nolberto J. (1979). *Programación lineal.* 3º edición. Buenos Aires. Astrea.

Suarez Suarez, Andrés S. (1998). *Decisiones óptimas de inversión y financiación en la empresa*. 18º edición. Madrid. Pirámide.