Universidad Nacional de Mar del Plata

Facultad de Ciencias Económicas y Sociales

Asignatura Matemática para Economistas II

ECUACIONES DINÁMICAS DISCRETAS APLICADAS EN MODELOS ECONÓMICOS

Pía Acciarini
Alberto Elías
Santiago Graña
Delfina Lobbosco
Franco Manzo
Lizzie Marcel
Camila Roldán
Beatriz Lupín

XIX Jornadas Nacionales de Tecnología Aplicada a la Educación Matemática

Departamento Pedagógico de Matemática (DPM)
Centro de Investigación en Métodos Cuantitativos Aplicados a la Economía y a la Gestión (CMA/IADCOM)

FCE-UBA, CABA, 08-09 mayo 2019

INTRODUCCIÓN

OBJETIVO

Estudio de la trayectoria temporal discreta de una variable.

A tal fin, se desarrolla la fundamentación conceptual que sustenta la aplicación de ecuaciones en diferencias finitas (ed) en diversos modelos económicos.

Sistemas DINÁMICOS

ED

En términos CONTINUOS

Valores $\Re$

Puntos

dy/dx

Ej.: crecimiento de la población de una especie pesquera

ed

En términos DISCRETOS

Valores $\mathbb{Z}$

Períodos

$\Delta y/\Delta x$

Ej.: sucesiones en Matemática Financiera

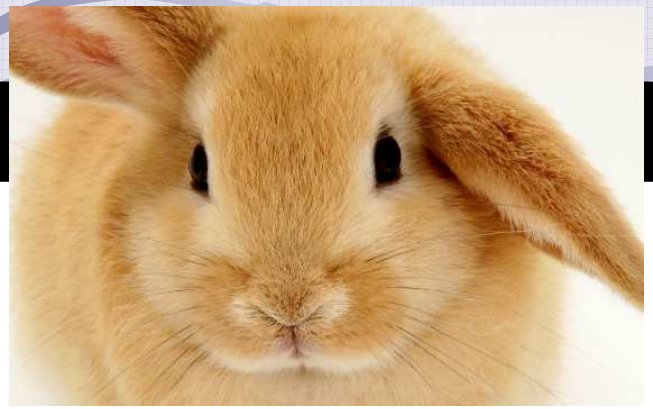
En Economía, se estudia, frecuentemente la trayectoria temporal de una variable. Asimismo, es relevante saber si un estado de equilibrio es estable.

La solución de una ed es convergente si tiende a algún valor definido, conforme "t" ↑ de manera indefinida. Dicho valor, es el estado **ESTACIONARIO** -o estable-. Implica un equilibrio a largo plazo. La variable "Y_t" permanece estática: $\Delta Y_t = 0$.

(Arya *et al.*, 2009; Bonifaz & Winkelried, 2010; Chiang, 1987; Sydsaeter & Hammond, 2009)

DESARROLLO DE LA PROPUESTA

I. Modelo Keynesiano Simple

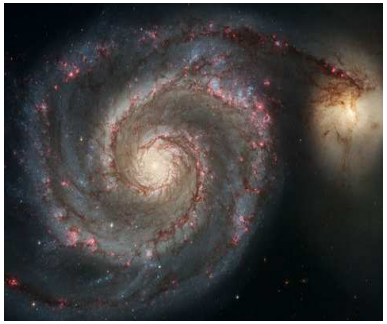


Fibonacci estudiando la velocidad de cría de conejos, bajo condiciones ideales en Europa, durante el siglo XIII, llega a esta sucesión de números $\mathscr{N}$:

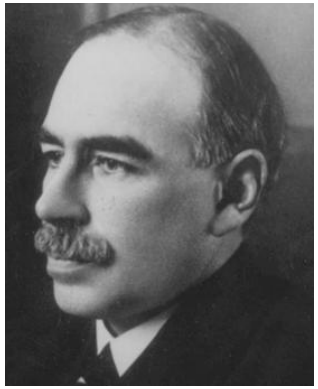
$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597 \ldots$$

La que define mediante una relación de recurrencia que comienza con 0, 1, 1 y, a partir del 4to. valor, cada término resulta de la suma de los 2 anteriores.

Es posible descubrir la Sucesión de Fibonacci en la naturaleza



Multiplicador Simple del Gasto Autónomo
-Multiplicador Keynesiano Simple (k)-



John Maynard KEYNES
(economista inglés, 1883-1946)

Es un coeficiente numérico que indica cuánto varía el ingreso nacional (Y) cuando un gasto autónomo varía en $ 1. En una economía simple como la que nos ocupa, hay dos gastos autónomos: Co e Io.

Es posible calcularlo mediante estas fórmulas:

$k = \Delta Y / \Delta$ Gasto autónomo

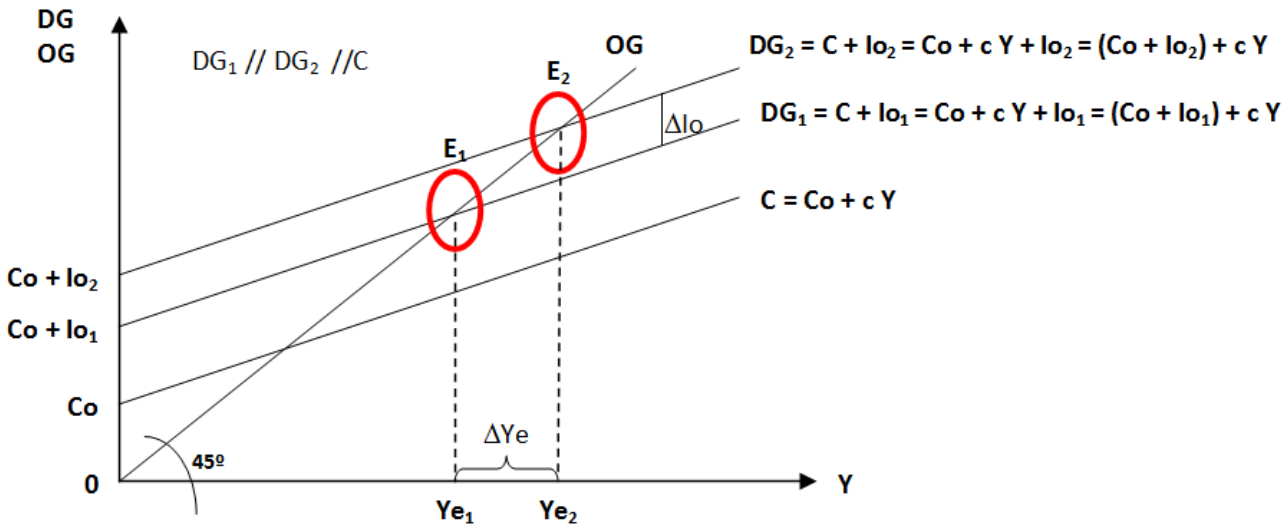
$k = 1 / (1 - PMgC)$

$k = 1 / PMgA$

Depende de la PMgC / PMgA: a > (<) PMgC, > (<) k. Asimismo, a > (<) PMgA, < (>) k.

Cuánto mayor sea la proporción de Y que circula y menor la sustraída, mayores serán las fluctuaciones del Y por cada variación de un gasto autónomo.

Adopta valores mayores o iguales a 1.



Supóngase que una compañía dedicada a la producción de computadoras decide ampliar su planta y para ello invierte $ 1.000.000 (ΔIo) y que la PMgC es igual a 0,80, de lo que se desprende que k = 5.

El monto de la Io, será empleado para pagar a los obreros de la construcción y a la empresa constructora, quiénes aumentan sus Y en, precisamente, $ 1.000.000.

Si los obreros y la empresa constructora gastan en consumo: ΔIo x PMgC = $ 1.000.000 (0,80) = = $ 800.000 en la empresa H, la misma recibe $ 800.000 en concepto de ingresos por ventas.

Esta última emplea parte de esos $ 800.000 en gastos de consumo en la empresa J: $ 800.000 x 0,80 = $ 640.000.

Por su parte, la empresa J emplea parte de esos $ 640.000 en gastos de consumo en la empresa R: $ 640.000 x 0,80 = $ 512.000.

Y, así, sucesivamente hasta que el Y se incremente en k x ΔIo = 5 x 1.000.000 = $ 5.000.000.

El incremento original de la Io ($ 1.000.000) puso en marcha una cadena de gastos de consumo decreciente, tal como lo detalla la tabla presentada a continuación:

Período	Gasto en consumo en cada período	Gasto en consumo acumulado
0	1.000.000	1.000.000
1	800.000	1.800.000
2	640.000	2.440.000
3	512.000	2.952.000
.	.	.
.	.	.
.	.	.
$t \rightarrow \infty$	0	5.000.000

$(0,80)^0\ 1.000.000 + (0,80)^1 \times 1.000.000 + (0,80)^2 \times 1.000.000 + (0,80)^3 \times 1.000.000 + \ldots =$

$$= 1.000.000\ \underbrace{(0,80^1 + 0,80^2 + 0,80^3 + \ldots)}_{\text{Progresión geométrica finita} = k} =$$

$$= 1 / [(1 - \underbrace{0,80}_{\text{PMgC}})] \times 1.000.000 = 5 \times 1.000.000 = 5.000.000 \Rightarrow k \times \Delta Io = \Delta Ye$$

Efecto multiplicador

En el marco de la Teoría de las ed, el problema del Multiplicador Simple del Gasto Autónomo se puede traducir en: $\mathbf{y_t = (0,80)^t y_0}$. Aplicando el Método Iterativo -recursivo-:

$t = 0$ ----- $y_0 = (0,80)^0\ y_0 = y_0 = 1.000.000$ (Gasto en inversión)

$t = 1$ ----- $y_1 = (0,80)^1\ y_0 = (0,80)\ (1.000.000) = \$\ 800.000$

$t = 2$ ----- $y_2 = (0,80)^2\ y_0 = (0,80)\ \underbrace{(0,80)\ y_0}_{y_1} = (0,80)\ (800.000) = \$\ 640.000$

$t = 3$ ----- $y_3 = (0,80)^3\ y_0 = (0,80)\ \underbrace{(0,80)^2\ y_0}_{y_2} = (0,80)\ (640.000) = \$\ 512.000$

.....

II. Modelo de la Telaraña

"The Cobweb Theorem" (1938)
Mordecai J. B. Ezequiel (economista estadounidense, 1899-1974)

Se trata de un mercado de Competencia Perfecta, con la particularidad de que la demanda depende del precio del período actual mientras que el oferta depende del precio del período anterior.
Generalmente, aplicable a un mercado de un producto agropecuario, difícil de almacenar, perecedero.

A continuación, se considera el caso del mercado del producto agropecuario "R", cuyo funcionamiento se encuentra descripto por las siguientes funciones:

$$\begin{cases} Q_R{}^d{}_t = \alpha - \beta P_t & (Dn_R) \\ Q_R{}^o{}_t = -\gamma + \delta P_{t-1} & (Of_R) \end{cases}$$

$$\alpha, \beta, \gamma, \delta > 0$$

En el equilibrio: $Q_R{}^d{}_t = Q_R{}^o{}_t$

$$\alpha - \beta P_t = -\gamma + \delta P_{t-1}$$

$$\beta P_t + \delta P_{t-1} = \alpha + \gamma$$

Normalizando y desplazando los subíndices de "t" en 1 período:

$$\mathbf{P_{t+1} + \underbrace{\delta / \beta}_{a} P_t = \underbrace{(\alpha + \gamma) / \beta}_{b}}$$

edo, de 1er orden, lineal con coeficientes y término constantes:

$$Y_{t+1} - a\, Y_t = b$$

Donde: a = coeficiente, $\neq 1$; b = término

Queda conformada una ed, cuya solución general es de la forma:

$$\mathbf{Y_t = \{Y_0 - [b / (1 + a)]\} (-a)^t + b / (1 + a)}$$

Particularizada al ejemplo que nos ocupa y considerando que $Y_0 = P_0$ = precio inicial:

$$\mathbf{P_t = \underbrace{\{P_0 - [(\alpha + \gamma) / (\beta + \delta)]\} (-\delta / \beta)^t}_{Y_c} + \underbrace{[(\alpha + \gamma) / (\beta + \delta)]}_{Y_P = P_E}}$$

Solución general:

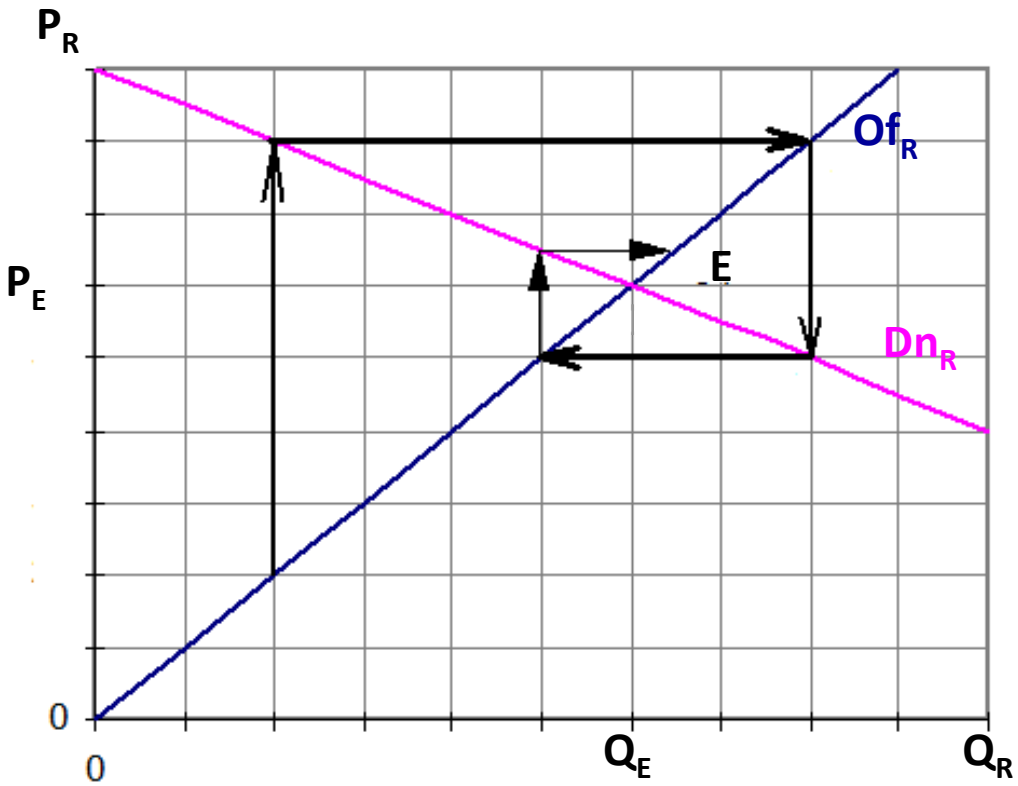
$Y_t = Y_C + Y_P = A\ a^t + [(b/(1-a)]$

Donde: A = constante, $\neq 0$

Dada la $\mathbf{Y_c = A\ a^t}$, el equilibrio es dinámicamente estable si $Y_c \rightarrow 0$, cuando $t \rightarrow \infty$.

Si a "Y_c" se suma "Y_p", la trayectoria se desplaza verticalmente hacia arriba. No afecta la convergencia -o la divergencia- pero sí altera el nivel respecto al cual se mide la misma.

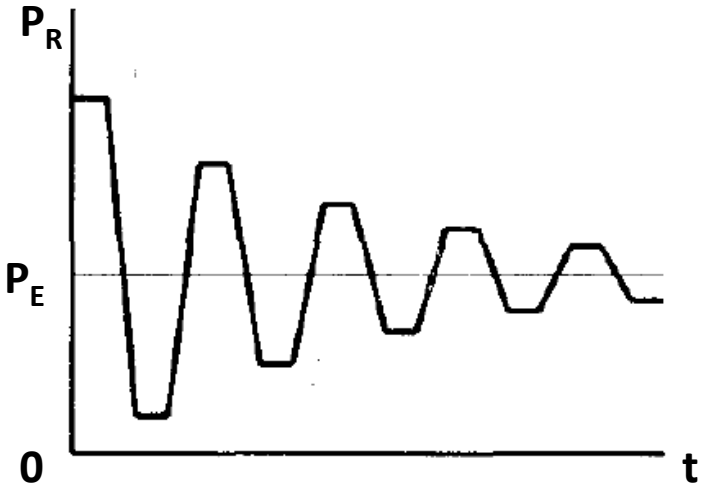
Tres casos posibles

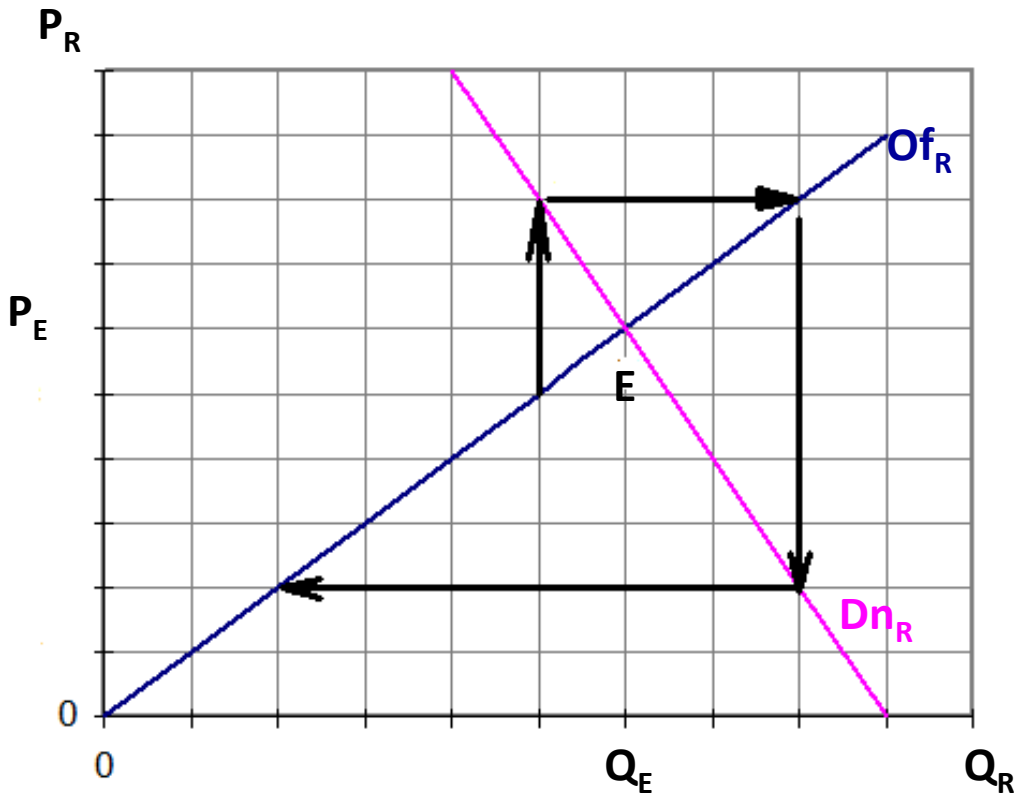


$$|\xi_p^d| > \xi_p^o$$

Convergente al P_E

Telaraña AMORTIGUADA

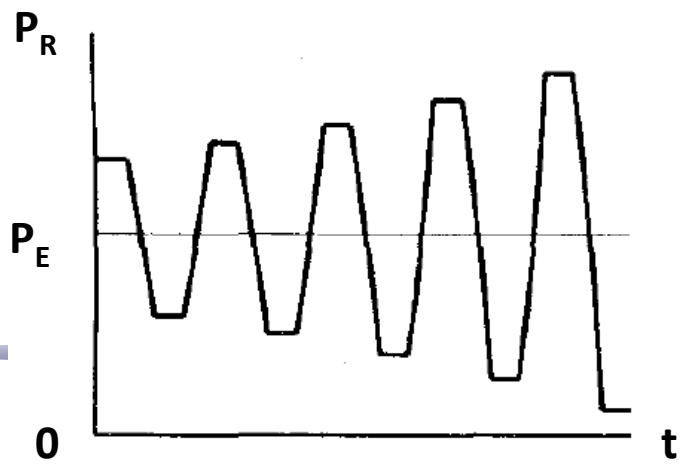


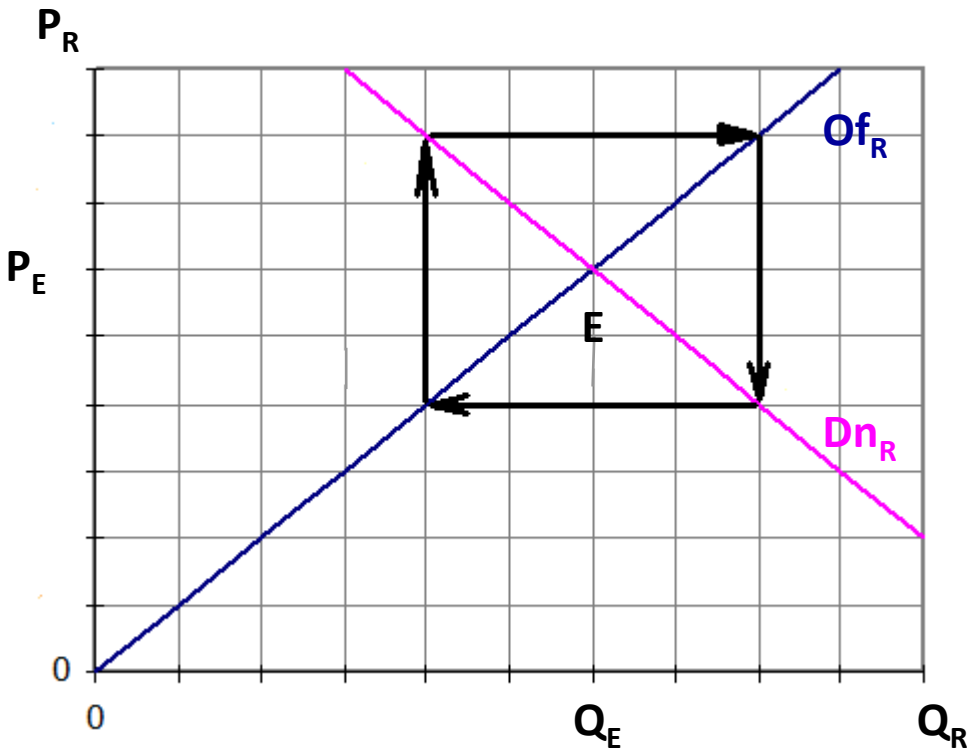


$|\xi_p{}^d| < \xi_p{}^o$

Divergente del P_E

Telaraña EXPLOSIVA

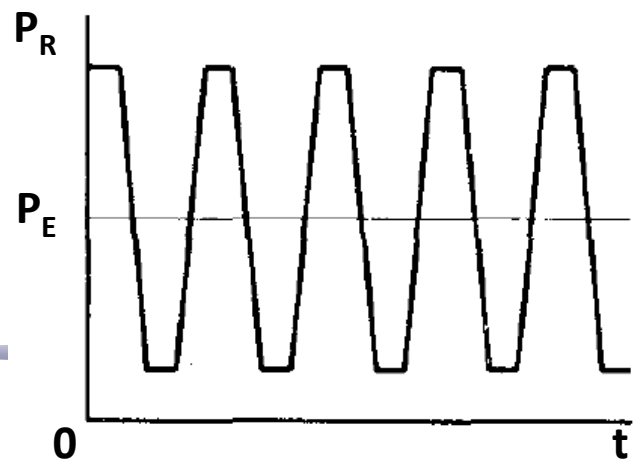




$$|\xi_p^d| = \xi_p^o$$

Oscila en torno al P_E

Telaraña UNIFORME



Modelo neoclásico de crecimiento económico

A Contribution to the Theory of Economic Growth

Robert M. Solow

The Quarterly Journal of Economics, Vol. 70, No. 1. (Feb., 1956), pp. 65-94.

Stable URL:
http://links.jstor.org/sici?sici=0033-5533%28195602%2970%3A1%3C65%3AACTTTO%3E2.0.CO%3B2-M

The Quarterly Journal of Economics is currently published by The MIT Press.

Robert SOLOW
(economista estadounidense, 1924. Premio Nobel 1987)

Función de producción agregada de un bien en una economía cerrada:

$$Y_t = f(K_t, L_t, A_t)$$

Donde: Y, K, L, A = producción total, capital, trabajo y tecnología y organización de la producción y los mercados en el período considerado, respectivamente; t = tiempo

Supuestos:

- Función continua, diferenciable y positiva. Las PMg de los factores productivos son > 0 y ↓.
- Función linealmente homogénea de grado 1 -rendimientos constantes a escala-.
- Los bienes y mercados involucrados son de Competencia Perfecta.
- El K se deprecia exponencialmente a una tasa δ [ε (0, 1)].
- Las familias son dueñas del L y del K.
- Se cumplen las condiciones de Inada -estabilidad del crecimiento económico- .

(Socualaya Acosta, 2010)

El K es el factor productivo esencial para el crecimiento económico y dado el supuesto sobre su depreciación:

$$K_{t+1} = (1-\delta)\, K_t + I_t$$

Las familias ahorran parte de su Y_d: $S_t = s\, Y_t$

Y consumen una proporción de su Y_t restante: $C_t = (1-s)\, Y_t$

Donde: I, S y C = inversión, ahorro y consumo en el período considerado, respectivamente; s = Propensión Marginal a Ahorrar; Y_d = ingreso disponible = Y_t.

En el equilibrio:

$$S_t = I_t = Y_t - C_t$$

Conforme lo anterior y realizando trabajo algebraico:

$$K_{t+1} = s\, f[K_t, L_t, A_t] + (1-\delta)\, K_t \qquad [i]$$

Ley Fundamental del Movimiento del Modelo de Solow

Si la tecnología está dada: $\mathbf{A_t = A}$

Y si la función general Y_t adopta la forma de una Cobb-Douglas:

$$\boxed{\mathbf{Y_t = A_t\, K_t^{\alpha}\, L_t^{(1-\alpha)} = A\, K_t^{\alpha}\, L_t^{(1-\alpha)}}}$$

<u>Donde</u>: α = participación de K_t en Y_t, varía entre 0 y 1.

Remuneración al factor productivo K_t: $r_t = \partial\, y_t / \partial\, K_t = \alpha\, A\, K_t^{-(1-\alpha)}\, L_t^{(1-\alpha)}$

Remuneración al factor productivo L_t: $w_t = \partial\, y_t / \partial\, L_t = (1-\alpha)\, A\, K_t^{\alpha}\, L_t^{-\alpha}$

Si la población no $\uparrow$: $\mathbf{L_t = L}$

Relación K-L: $k_t = \mathbf{K_t / L}$

El Modelo de Solow se puede expresar *per cápita*, dividiendo m. a m. por L y sustituyendo la Y_t general por la Cobb-Douglas:

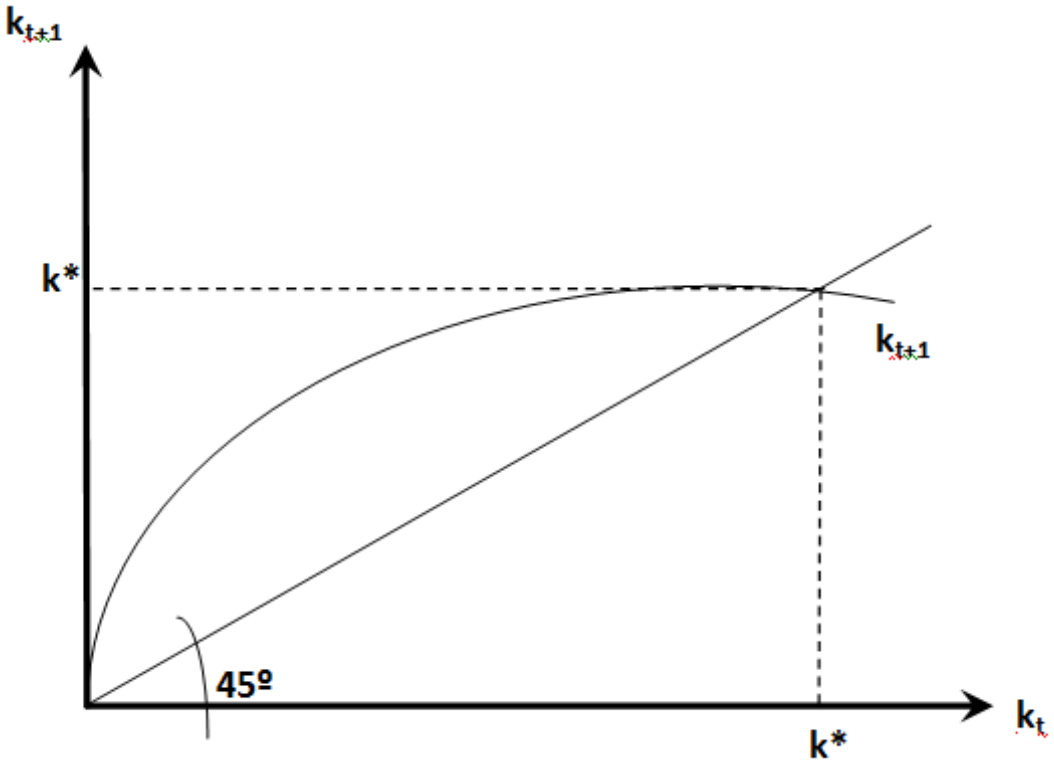
$$\mathbf{k_{t+1} = s\, f[\, k_t + (1-\delta)\, k_t)}$$

[ii]

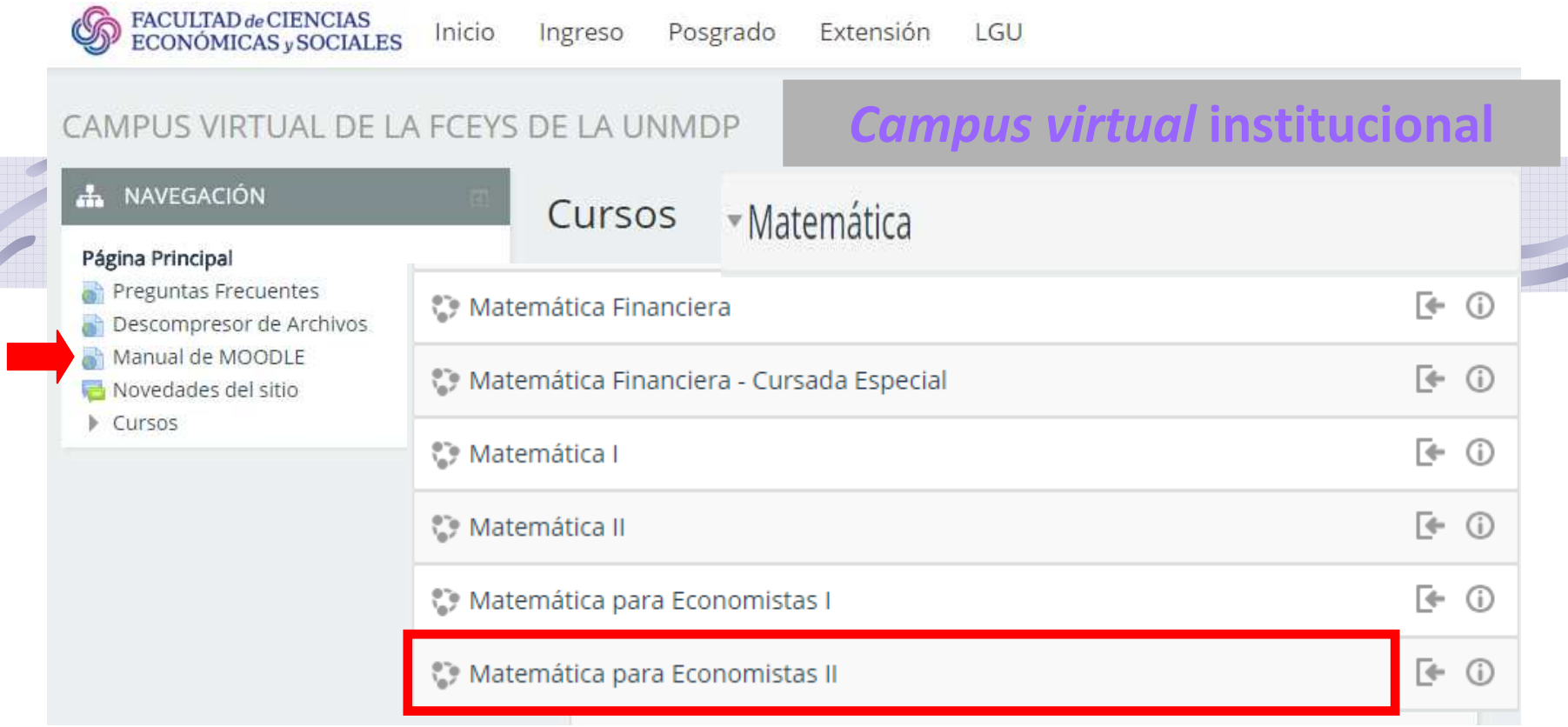
Para este Modelo, un equilibrio de estado estacionario es una senda de equilibrio para el que: $k_t = k^*$.

La razón K/L permanece constante y, como se considera que la población, también, permanece constante, el nivel de K total de la economía permanece constante.

Matemáticamente, es un punto estacionario de equilibrio de la ed **[ii]**.



INTERVENCIÓN PEDAGÓGICA



***Campus virtual* institucional**

Técnica C-Q-A

Cuadro resumen

Construcción conjunta de conocimientos

Aporte de otras aplicaciones económicas

CONSIDERACIONES FINALES

Entre los propósitos pedagógicos de la presentación, se encuentran: aplicar e integrar los conocimientos recibidos acerca de ed, en la detección de problemas, el análisis, la propuesta de soluciones viables y la interpretación matemática y económica y la evaluación de las mismas; vincular diferentes asignaturas; promover el empleo de las TICs e incentivar el trabajo colaborativo.

Gracias por su atención

Pía
pia.accia@gmail.com
Alberto
albertoelias@hotmail.com
Santiago
santigrana95@gmail.com
Delfina
lobboscomdelfina@gmail.com
Franco
manzofranco1997@gmail.com
Lizzie
lizziemarcel@gmail.com
Camila
camila.anto.roldan@gmail.com
Beatriz
beatrizlupin@gmail.com