Evolución en tiempo discreto de una operatoria financiera

Brillanti, Carla – Lupín, Beatriz

Asignatura "Matemática para Ecoomistas II"
Facultad de Ciencias Económicas y Sociales, Universidad Nacional de Mar del Plata
brillanticarla@gmail.com – beatrizlupin@gmail.com

Especialidad: Educación Matemática

Palabras Clave: Aprendizaje significativo, Ecuaciones en diferencias, Matemática, Economía, Aplicación empírica

Resumen

En el presente trabajo, se estudia la evolución matemática de un fenómeno económico, en tiempo discreto, mediante la aplicación de una *ecuación en diferencias*, ordinaria, de primer orden y lineal, con coeficiente y término constantes, a una operación financiera concreta: la amortización de un préstamo bancario bajo el sistema francés o progresivo. Así, se analiza un modelo de capitalización mensual, para un período que comprende un año, con datos reales y empleando una planilla electrónica de cálculo, teniendo en cuenta los supuestos en los que se sustenta. Dicha aplicación se lleva a cabo en el marco de la asignatura *Matemática para Economistas II* que cursan los estudiantes de tercer año de la Carrera Licenciatura en Economía en la Facultad de Ciencias Económicas y Sociales de la Universidad Nacional de Mar del Plata. Con el propósito de propiciar el aprendizaje significativo, durante las clases se analizan problemáticas reales, tanto desde la perspectiva de la asignatura como desde la perspectiva de otras asignaturas y disciplinas relacionadas. Por lo tanto, esta propuesta didáctica representa una contribución al respecto, facilitando los dinámicos y complejos procesos de enseñanza y de aprendizaje y acercando a los estudiantes a su futura actuación profesional, conforme el régimen académico vigente.

1 Introducción

La asignatura *Matemática para Economistas II*, perteneciente al ciclo profesional de la Carrera Licenciatura en Economía de la Facultad de Ciencias Económicas y Sociales de la Universidad Nacional de Mar del Plata, se dicta a los estudiantes que cursan el tercer año. Entre las estrategias pedagógicas implementadas, se encuentra la de plantear a los estudiantes problemas reales, de su futuro campo laboral, cuya resolución puede ser abordada mediante la aplicación y articulación de conceptos desarrollados en ésta y en otras asignaturas cursadas. De esta manera, de acuerdo con el régimen académico institucional, se incentiva a los estudiantes a reflexionar críticamente acerca de determinadas herramientas que suelen ser consideradas por los mismos como teóricas, abstractas, carentes de utilidad empírica y a integrar conocimientos aportados por otros campos disciplinares.

En esta oportunidad, se presenta una propuesta que aplica el tema *ecuaciones en diferencias* –unidad III del programa– a una cuestión financiera: la amortización de un préstamo bancario. El propósito fundamental es potenciar el desarrollo de habilidades analíticas que permitan modelar e interpretar un fenómeno económico concreto empleando dichas ecuaciones. A tal fin, primero se lleva a cabo una breve revisión conceptual de las ecuaciones en tiempo discreto; luego, se efectúa la ejercitación correspondiente y, por último, se realizan las consideraciones finales.

2 Revisión conceptual de ecuaciones en diferencias

En general, la literatura especializada define *ecuaciones en diferencias* realizando un paralelismo con las ecuaciones diferenciales, remarcando el hecho de que las primeras implican variables independientes discretas –generalmente, el tiempo (t)–, . De esta manera Chiang (1987: 560) y Chiang & Wainwright (2008: 544), indican que cuando la variable independiente se considera en términos discretos no es correcto emplear derivadas sino que deben emplearse diferencias. Siguiendo esta línea, Sydsaeter & Hammond (2009: 583) se refieren a las ecuaciones en diferencias como aquellas que relacionan cantidades en términos discretos. Por su parte, Arya, Lardner & Ibarra Mercado (2009: 291) establecen que dada una sucesión de números reales $y_0, y_1, y_2, \ldots$, una ecuación en diferencias de orden n es una ecuación que relaciona $y_t, y_{t+1}, \ldots, y_{t+n}$, para todo valor de t ($t = 0, 1, 2, \ldots$). Finalmente, es posible citar a Bonifaz & Winkelried (2010: 263) quienes definen a las ecuaciones en diferencias en dos oportunidades. Primero, señalan que las mismas son ecuaciones que contienen una o más diferencias de una función desconocida de una variable. Luego, que una ecuación en diferencias expresa una relación entre una variable dependiente y sus adelantos o rezagos y una variable independiente.

Las ecuaciones en diferencias se clasifican conforme diversos criterios: según el número de variables independientes involucradas, el orden y el grado. Así, cuando contienen una sola variable independiente se denominan *ordinarias* en tanto que si contienen más una variable independiente, *parciale*s. Respecto al orden, el mismo se determina considerando el orden de la mayor diferencia. En cuanto al grado, se establece teniendo en cuenta la potencia de la diferencia de mayor orden. Particularmente, una ecuación en diferencias es lineal si la variable *y*, para cualquier período, está elevada a una potencia igual a la unidad o no está multiplicada por un término *y* de otro período. (Bonifaz & Winkelried, 2010: 263; Chiang, 1987: 562; Chiang & Wainwright, 2008: 546)

Con relación a la solución de una ecuación en diferencias, es posible indicar que se trata de un conjunto de valores para y_t de manera que si éstos se sustituyen en la misma se satisface como una identidad para todos los valores de *t* (Arya, Lardner & Ibarra Mercado; 2009: 291). Asimismo, se cumple el teorema que plantea que la solución existe y es única (Sydsaeter & Hammond, 2009: 584). Dicha solución, se divide en: *general* o *completa* cuando se encuentra compuesta por el conjunto de todas las soluciones, incluyendo constantes arbitrarias y *particular* si se obtiene a partir de información adicional, o sea, de condiciones iniciales o de límite que permiten que las constantes arbitrarias adopten valores específicos (Arya, Lardner & Ibarra Mercado; 2009: 296; Chiang, 1987: 566; Chiang & Wainwright, 2008: 548).

Dado que en esta propuesta, se aplica una ecuación en diferencias ordinaria, de primer orden y lineal, con coeficiente y término constantes, a continuación se centrará el interés en este tipo de ecuación. Siguiendo a

Chiang (1987: 565) y a Chiang & Wainwright (2008: 548), la misma se representa y resuelve mediante el método general de la siguiente manera:

$$y_{t+1} + ay_t = b \quad (1)$$

Donde: a = coeficiente y b = término, ambos constantes.

Por el *Principio de Superposición*, la solución general (y_t) se encuentra conformada por una *solución particular* (y_p) –término *b* distinto de 0– más una *solución complementaria* (y_c) –término *b* nulo– (Bonifaz & Winkelried, 2010: 262). La primera de ellas se obtiene, proponiendo la solución: $y_t = y_{t+1} = k$, siendo k una constante. Sustituyendo la solución propuesta en (1) y despejando la constante *k*:

$$k + ak = b \Rightarrow k(1+a) = b \Rightarrow k = \frac{b}{(1+a)} \quad (2)$$

De lo anterior, se deduce que y_p es igual a:

$$y_t = y_p = \frac{b}{(1+a)} \quad (3)$$

Esta solución es válida siempre y cuando el coeficiente *a* sea distinto de -1. Si la expresión (3) queda indefinida –coeficiente *a* igual a la unidad–, la solución de prueba debe adoptar una forma más compleja, por ejemplo: $y_t = kt$ e $y_{t+1} = k(t+1)$, continuando, luego, con el procedimiento aplicado precedentemente.

Para la deducción de y_c, primero, se construye la *ecuación homogénea* asociada a la ecuación en diferencias original (1):

$$y_{t+1} + ay_t = 0 \quad (4)$$

Luego, se propone la solución: $y_t = A\, c^t$, siendo *A* y *c* constantes distintas de cero. A fin de obtener la ecuación característica o auxiliar, se sustituye la solución anterior en (4):

$$Ac^{t+1} + Aac^t = 0 \quad (5)$$

Normalizando dicha expresión –dividiendo miembro a miembro por la constante *A*–, aplicando propiedad de la potenciación y sacando factor común:

$$c^t(c+a) = 0 \quad (6)$$

De esta manera, la expresión entre paréntesis es la *ecuación característica o auxiliar*, la que es de grado 1 dado que la ecuación en diferencias original (1) es de primer orden y, por ende, tiene una sola raíz. Como la constante *c* es distinta de cero:

$$c + a = 0 \Rightarrow c = -a \quad (7)$$

Retomando la solución propuesta, y_c es igual a:

$$y_t = y_c = A(-a^t) \quad (8)$$

Sumando las expresiones (3) y (8), se obtiene la solución general:

$$y_t = y_p + y_c = \frac{b}{(1+a)} + A(-a^t) \quad (9)$$

Debido a la presencia de la constante arbitraria *A*, esta solución no se encuentra determinada siendo necesaria información adicional, como ya se indicó, a fin de calcular la misma. Cabe destacar que y_p indica el nivel de equilibrio inter-temporal en tanto que y_c, las desviaciones de la trayectoria temporal respecto al equilibrio (Chiang, 1987: 565; Chiang & Wainwright, 2008: 548).

3 Desarrollo de la propuesta

En Economía, se suele estudiar cómo evoluciona una determinada variable respecto a distintos momentos en el tiempo. Particularmente, si la unidad de tiempo tomada como referencia para definir los ingresos o los egresos de dinero o los momentos en que se capitalizan los intereses se encuentra expresada en términos discretos entonces las *ecuaciones en diferencias* son las indicadas para resolver problemas de índole financiera (Robledo, 2001: 21).

Así, en esta propuesta, que sigue a Contreras Ballesteros (2020:32) y a Mirman Hernández (2019: 22), se considera el caso de un préstamo, donde se cuenta con un monto de dinero prestado al inicio y se quiere conocer el valor de las sucesivas cuotas a pagar en distintos períodos de tiempo y cuánto se adeuda en un determinado momento. Para conocer el saldo del préstamo en un período específico (C_t), cuyo monto a amortizar es el saldo original (C_0), durante una cantidad *n* de períodos a una tasa de interés *i*, mediante una cantidad de cuotas constantes de valor *m,* se debe resolver la siguiente ecuación en diferencias:

$$C_{t+1} = C_t - m \quad (10)$$

donde *i* se encuentra implícitamente en la ecuación ya que se utiliza para el cálculo de la cuota *m* (Tenorio Villalón *et. al.*, 2013: 190). Las cuotas representan una renta cuyo valor actual debe ser igual al préstamo otorgado y, además, deben constituir una imposición donde su valor final sea equivalente a la capitalización del préstamo al concluir los períodos considerados (Kysbie & Levstein, 2010: 83).

Si bien existen diferentes sistemas de amortización de préstamos, es decir, métodos que indican cómo se devolverá el capital cedido en préstamo, a través de una sucesión de pagos o cuotas (Kysbie& Levstein, 2010: 83), en el caso bajo análisis se aplicará el *sistema francés* o *progresivo*. Este último presenta las siguientes características:

- Las cuotas a pagar son constantes.
- Cada cuota se compone de una parte de capital y una parte de interés.
- La parte de capital es creciente con las sucesivas cuotas.
- La parte de interés es decreciente con las sucesivas cuotas.
- Los intereses se calculan sobre saldos.

En este sistema, *i* interviene explícitamente en la ecuación en diferencias a resolver:

$$C_{t+1} = C_t + iC_t - e \quad (11)$$

donde se tienen cuotas constantes que se simbolizan con la letra *e.* La ecuación anterior expresa que lo que se debe en el período *t+1* es igual al saldo en el período anterior *t* más los *i* por ese saldo, menos lo que se paga, que es la cuota constante.

Conforme datos reales obtenidos del sitio *web* del Banco de la Nación Argentina, el día 28/07/2021, el caso propuesto considera un préstamo cuyo monto asciende a $500.000,00, a una tasa de interés nominal anual del 55,50% –aproximadamente, 4,63% por mes–, con capitalización mensual, donde las cuotas constantes a abonar son de $55.225,89, por un plazo de 12 meses.

Dado que el propósito es formular y resolver la ecuación en diferencias que representa la amortización del préstamo, primero, se reagrupan los términos de (11):

$$C_{t+1} - C_t\left(1 + i\right) = -e \quad (12)$$

Posteriormente, se calcula la tasa de interés a emplear, por equivalencia de tasas:

$$\left(1 + \frac{0,5550}{12}\right)^{12} = \left(1 + i_{12}\right)^{12} \Rightarrow i_{12} = 0,04625 \quad (13)$$

Sustituyendo los datos con que se cuenta en (12), se arriba a la siguiente ecuación en diferencias:

$$C_{t+1} - C_t\left(1 + 0,04625\right) = -55.225,89 \Rightarrow C_{t+1} - 1,04625C_t = -55.225,89 \quad (14)$$

la que se encuentra normalizada y que puede ser clasificada como ordinaria, de primer orden y lineal, con coeficiente (a = -1,04625) y término (e = b = -55.225,89) constantes.

Luego, se procede a obtener y_p. Dado que el coeficiente *a* es distinto de 0, es posible proponer esta sencilla solución: $y_p = C_t = C_{t+1} = k$ –donde k es una constante– y sustituyendo la misma en (14):

$$k - 1,04625k = -55.225,89 \Rightarrow k = 1.194.073,30 \quad (15)$$

También el valor de la constante *k* se puede obtener aplicando directamente (2): b/(1+a) = -55.225,89/(1-1,04625). Como $y_p = k \Rightarrow y_p = 1.194.073,30$. Lo anterior, implica un estado de estabilidad, o sea, un equilibrio estacionario (Chiang, 1987: 566; Chiang & Wainwright, 2008: 549)

A continuación, se emprende la deducción de y_c. Para ello, se arma la ecuación homogénea correspondiente:

$$C_{t+1} - 1,04625C_t = 0 \quad (16)$$

Y se propone la solución: $y_c = C_t = A\, c^t$, la que se sustituye en la expresión anterior:

$$Ac^{t+1} - 1,04625Ac^t = 0 \quad (17)$$

Después de normalizar, aplicar propiedad de potenciación y sacar factor común, se obtiene la ecuación característica, la que se encuentra entre paréntesis:

$$c^t\left(c - 1,04625\right) = 0 \quad (18)$$

La ecuación característica es de grado 1, por ende, la misma tiene una sola raíz. Como la constante *c* es distinta de 0:

$$c - 1{,}04625 = 0 \Rightarrow c = 1{,}04625 \quad (19)$$

Ya que $y_c = A\,c^t \Rightarrow y_c = A\,(1{,}04625)^t$.

Finalmente, la solución general surge de la suma de y_p e y_c:

$$y_t = C_t = y_p + y_c = 1.194.073{,}30 + A\left(1{,}04625\right)^t \quad (20)$$

Pero dada la presencia de la constante arbitraria A, y_t no se encuentra determinada, recurriéndose a información adicional como lo es monto del capital en el momento inicial ($500.000,00) a fin de revertir tal situación:

$$C_0 = 500.000 = 1.194.073{,}30 + A\left(1{,}04625\right)^0 \Rightarrow A = -694.073{,}30 \quad (21)$$

Así, la solución general queda especificada de la siguiente manera:

$$C_t = 1.194.073{,}30 - 694.073{,}30\left(1{,}04625\right)^t \quad (22)$$

Si en la solución precedente, se sustituye *t* por 1, se arriba a:

$$C_1 = 1.194.073{,}30 - 694.073{,}30\left(1{,}04625\right)^1 \Rightarrow C_1 = \$467.899{,}11 \quad (23)$$

De igual modo, se procede para los meses restantes, reemplazando *t* por 2, 3,…, 12.

En la siguiente tabla, se presenta el esquema de amortización del préstamo completo, siendo C_t y *CC* el capital adeudado y la parte de capital que se amortiza con el pago de la cuota, en cada mes, respectivamente; *I* la parte de interés que se paga con cada cuota y *e* la cuota constante, vale decir la suma de *CC* e *I*, que asciende a $55.225,89. Además, es posible apreciar que se cumple el resto de las características del sistema francés. Esto es, la parte de capital es creciente con las sucesivas cuotas mientras que la parte de interés es decreciente. Cabe señalar que CC_{acum} representa la deuda total amortizada e I_{acum} los intereses a pagar, en cada mes. El valor de CC_{acum}, para el último mes, debe ser igual al valor original del préstamo: $500.000,00.

Tabla 1. Esquema de amortización del préstamo

t	C_t	CC	I	e	CC_{acum}	I_{acum}
0	$500.000,00					
1	$467.899,11	$32.100,89	$23.125,00	$55.225,89	$32.100,89	$23.125,00
2	$434.313,55	$33.585,56	$21.640,33	$55.225,89	$65.686,45	$44.765,33
3	$399.174,67	$35.138,89	$20.087,00	$55.225,89	$100.825,33	$64.852,34
4	$362.410,61	$36.764,06	$18.461,83	$55.225,89	$137.589,39	$83.314,16
5	$323.946,21	$38.464,40	$16.761,49	$55.225,89	$176.053,79	$100.075,65
6	$283.702,83	$40.243,38	$14.982,51	$55.225,89	$216.297,17	$115.058,17
7	$241.598,19	$42.104,63	$13.121,26	$55.225,89	$258.401,17	$128.179,42
8	$197.546,22	$44.051,97	$11.173,92	$55.225,89	$302.453,78	$139.353,34
9	$151.456,84	$46.089,38	$9.136,51	$55.225,89	$348.543,16	$148.489,85
10	$103.235,83	$48.221,01	$7.004,88	$55.225,89	$396.764,17	$155.494,73
11	$52.784,60	$50.451,23	$4.774,66	$55.225,89	$447.215,40	$160.269,39
12	$0,00	$52.784,60	$2.441,29	$55.225,89	$500.000,00	$162.710,68

Continuando con el mes 1, la diferencia entre el capital correspondiente al mismo (C_1 = \$467.899,11) y el capital inicial (C_0 = \$500.000,00), que es igual a CC = \$32.100,89, constituye la parte de capital que se paga con la primera cuota. Por otro lado, los intereses, calculados sobre saldos, totalizan \$23.125,00 como resultado de aplicar la tasa de interés al capital del mes anterior (C_0). De forma similar, se procede para el resto de los meses a fin de completar la tabla.

Tal como se observa en la Figura 1, la ejercitación puede desarrollarse mediante un simulador empleando la planilla de cálculo Microsoft Excel®.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Tipo de sistema	Frances		t	Ct	CC	I	e	CC_{acum}	I_{acum}
2				0	\$500.000,00					
3	Préstamo	\$500.000,00		1	\$467.899,11	\$32.100,89	\$23.125,00	\$55.225,89	\$32.100,89	\$23.125,00
4				2	\$434.313,55	\$33.585,56	\$21.640,33	\$55.225,89	\$65.686,45	\$44.765,33
5	TASA	4,63%		3	\$399.174,67	\$35.138,89	\$20.087,00	\$55.225,89	\$100.825,33	\$64.852,34
6	Vencida/Adelantada	Vencida		4	\$362.410,61	\$36.764,06	\$18.461,83	\$55.225,89	\$137.589,39	\$83.314,16
7	Efectiva/Nominal	Nominal		5	\$323.946,21	\$38.464,40	\$16.761,49	\$55.225,89	\$176.053,79	\$100.075,65
8	Periodo de Capitalizacion	Mes		6	\$283.702,83	\$40.243,38	\$14.982,51	\$55.225,89	\$216.297,17	\$115.058,17
9	Periodo de la operación	Mes		7	\$241.598,19	\$42.104,63	\$13.121,26	\$55.225,89	\$258.401,81	\$128.179,42
10				8	\$197.546,22	\$44.051,97	\$11.173,92	\$55.225,89	\$302.453,78	\$139.353,34
11	Número de cuotas	12		9	\$151.456,84	\$46.089,38	\$9.136,51	\$55.225,89	\$348.543,16	\$148.489,85
12	Cada cuanto se paga	Mes		10	\$103.235,83	\$48.221,01	\$7.004,88	\$55.225,89	\$396.764,17	\$155.494,73
13				11	\$52.784,60	\$50.451,23	\$4.774,66	\$55.225,89	\$447.215,40	\$160.269,39
14				12	\$0,00	\$52.784,60	\$2.441,29	\$55.225,89	\$500.000,00	\$162.710,68
15										
16										

Figura 1. Simulador de préstamos

Este simulador funciona de la siguiente manera: en las dos primeras columnas, se encuentran el detalle de la operatoria y los datos correspondientes –monto, tasa de interés mensual, número de cuotas– y, a partir de la columna *D*, el *software* completa automáticamente el esquema de amortización según las fórmulas de cálculo programadas al efecto.

4 Consideraciones finales

Con el caso desarrollado se demuestra cómo las *ecuaciones en diferencias* pueden aplicarse al análisis de una operatoria frecuente, no meramente teórica, como lo es la amortización de un préstamo. Tanto el modelo como la planilla de cálculo presentados permiten una directa y sencilla resolución para cada conjunto de datos de partida. El énfasis no se encuentra en la complejidad de la ecuación en tiempo discreto formulada sino en su utilidad concreta y cotidiana. Asimismo, se ha trabajado con datos reales y se ha relacionado un tema de la asignatura *Matemática para Economistas II* con otros propios del análisis financiero. Queda pendiente la extensión de la actividad a otros sistemas de amortización de préstamos y a la iniciativa de los estudiantes, impulsando la construcción colaborativa de conocimientos.

Referencias

Arya, J. C.; Lardner, R. W. & Ibarra Mercado, V. C. (2009). *Matemáticas aplicadas a la Administración, Economía, Ciencias Biológicas y Sociales*. México: Pearson Educación de México, S.A. de C.V.

Banco de la Nación Argentina (2021). Simulador de Préstamos Nación destino libre. https://www.bna.com.ar/Simulador/SubInterna/NacionDestinoLibre?subInterna=SimuladorPrestamosNacionDestinoLibre. Consultado: 28/07/2021.

Bonifaz, J. L. & Winkelried, D. (2010). *Matemática para la Economía Dinámica*. Lima: Centro de Investigaciones-Universidad del Pacífico.

Chiang, A. (1987). *Métodos fundamentales de Economía Matemática*. México: Mc Graw Hill.

Chiang, A. & Wainwright, K. (2008). *Métodos fundamentales de la Economía Matemática*. México: Mc Graw Hill.

Contreras Ballesteros, A. (junio 2020). *Ecuaciones en diferencias. Aplicaciones*. (Trabajo de fin de grado). Facultad de Ciencias Sociales y Jurídica-Universidad de Jaén, España.

Kisbye, P. & Levstein, F. (2010). T*odo lo que usted quiere saber sobre Matemática Financiera pero no se anima a preguntar*. Buenos Aires-Argentina: Instituto Nacional de Educación Tecnológica.

Mirman Hernández, R. (junio 2019). *Ecuaciones en diferencias, una aplicación al cálculo de saldos pendientes en operaciones de préstamo*. (Trabajo de fin de grado). Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales-Universidad de Sevilla, España.

Robledo, O. (octubre-diciembre 2001). Matemáticas Financieras con ecuaciones en diferencias finitas. Otra aproximación al cálculo del valor del dinero en el tiempo. *Revista Universidad EAFIT*, *124*: 21-30.

Sydsaeter, K. & Hammond, P. (2009). *Matemáticas para el Análisis Económico*. Madrid: Editorial Prentice Hall.

Tenorio Villalón, A. F.; Martín Carballo, A. M.; Paralela Morales, C. & Contreras Rubio, I. (diciembre 2013). Ecuaciones diferenciales y en diferencias aplicadas a los conceptos económicos y financieros. *Revista de Métodos Cuantitativos para la Economía y la Empresa*, *16*: 165-199.