MERCADO FINANCIERO: EJERCITACIÓN APLICANDO CADENAS DE MARKOV

GONZÁLEZ[1]Martín; RODRÍGUEZ TRILNIK[1], Tomás; FASCIGLIONE[1], Franco; PALAZZANI MUÑOZ[2], Brenda; BRILLANTI[3], Carla; YNOUB[4] ,Gustavo y LUPÍN[5], Beatriz
martingonzalezabcd@gmail.com - trtrilnik@gmail.com -francofasciglione@gmail.com- brenpalazzani@gmail.com - brillanticarla@gmail.com - gusynoub@yahoo.com.ar - beatrizlupin@gmail.com

Universidad Nacional de Mar del Plata

Palabras Clave: Matriz de Transición – Árbol de Probabilidades – fondo de inversión – rendimientos

RESUMEN EXTENDIDO

Para el desarrollo de este trabajo, se consultaron, fundamentalmente, la siguiente bibliografía: Arya *et al.* (2009); Budnick (1996); Chiang & Wainwright (2008); Haeussler *et al.* (2008) y Simon & Blume (1994). Así, en lo que sigue, se referencian solo las fuentes complementarias.

Una cadena de Markov (CdM) es un proceso estocástico, una sucesión de ensayos u observaciones, efectuados en un determinado sistema físico, en la que cada ensayo tiene el mismo número de resultados posibles. Cada resultado deja al sistema en cierto estado y cada movimiento se llama “paso” o “transición”. La probabilidad de cada resultado, para un ensayo dado, depende solo del resultado del ensayo inmediato anterior y no del resultado de cualquier ensayo anterior. En general, esta metodología se aplica a procesos discretos, para analizar movimientos en el tiempo, tal el caso del precio de cierre diario de la acción de una determinada compañía ya que depende, en gran medida, del comportamiento del mercado de valores durante el día anterior o de la elección de una marca específica por parte de un consumidor al estudiar la demanda de un bien o servicio pues puede depender de elecciones precedentes.

Debe su nombre al matemático ruso Andréi Márkov (1856-1922), quien planteó este tema al analizar textos poéticos. Él percibía a los mismos como una sucesión de estados vinculados, donde lo que sucede con una letra está vinculado con la letra previa –por ejemplo, hay cierta probabilidad de que una vocal sea precedida por una consonante–. (García Fronti, 2020)

Considerando la evolución histórica de un determinado evento, la CdM permite realizar predicciones de cambios de estado mediante el cálculo de la probabilidad de transición del mismo. En este sentido, la “Matriz de Transición” es la herramienta clave de esta metodología. Se trata de un arreglo probabilístico compuesto por n filas y n columnas –matriz cuadrada–, cuyos elementos son las probabilidades de transición, vale decir, las probabilidades de que el sistema pase a un estado “j” después de un estado inmediato anterior “i” (p_{ij}), siendo la suma de los elementos por fila igual a la unidad. Dado que “i” simboliza los elementos de la fila y “j” los elementos de la columna, si $i = j \Rightarrow$ el sistema permanece en el mismo estado (p_{ii}), en cambio, cuando $i \neq j \Rightarrow$ el sistema pasa de un estado a otro (p_{ij}). En las filas, se representan los estados actuales y, en las columnas, los siguientes. Por su parte, los elementos de la

[1]Estudiante Avanzado Carrera Licenciatura en Economía. Docente de la Asignatura “Matemática para Economistas II”.
[2]Estudiante Avanzada Carrera Licenciatura en Economía.
[3]Licenciada en Economía y Contadora Pública. Docente colaboradora de la Asignatura “Matemática para Economistas II” e Integrante del Centro de Investigaciones Económicas y Sociales, FCEyS-UNMDP.
[4]Licenciado en Economía. Docente de trabajos prácticos de la Asignatura “Matemática para Economistas II”.
[5] Licenciada en Economía. Especialista en Docencia Universitaria. Profesora Adjunta, Responsable de la Asignatura “Matemática para Economistas II” e Integrante del Centro de Investigaciones Económicas y Sociales, FCEyS-UNMDP. Profesora e Investigadora, Departamento de Ingeniería Pesquera, UTN-FRMDP.

diagonal principal reflejan el poder de retención y los elementos del resto de las celdas reflejan el poder de atracción. (Figura 1)

Figura 1: Matriz de Transición

	Siguiente				
Actual	**Estados**	**Estado 1**	**Estado 2**	**....**	**Estando n**
	Estado 1	p_{11}	p_{12}	....	p_{1n}
	Estado 2	p_{21}	p_{22}	....	p_{2n}
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
	Estado n	p_{n1}	p_{n2}	....	p_{nn}

Fuente: elaboración propia.

Siguiendo a Raposo (2021), un estado se puede clasificar en:

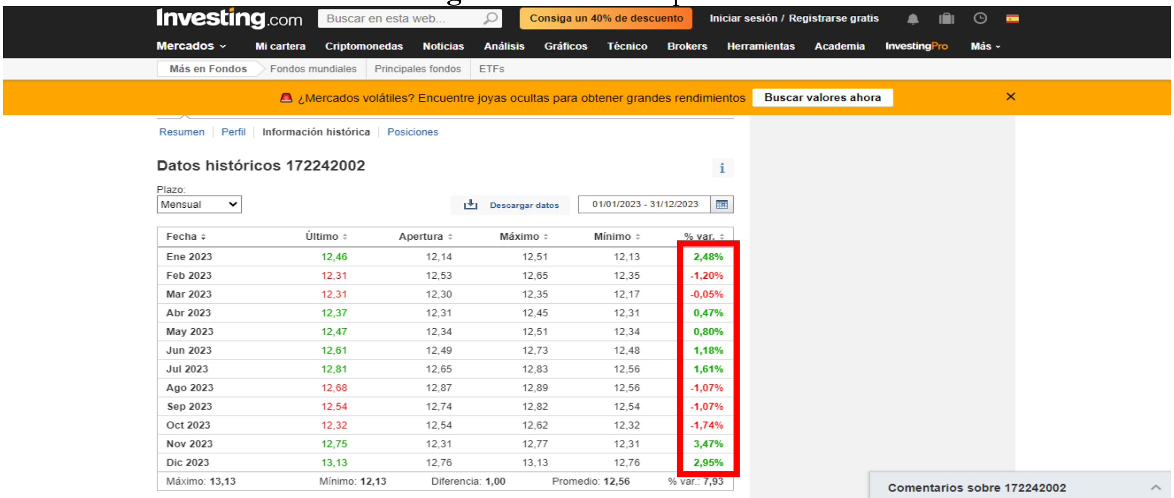
1) Absorbente → una vez alcanzado, no se puede salir de él ($p_{ii} = 1$).
2) Transitorio → una vez alcanzado, es posible cambiar de estado, pero no se puede volver al estado original.
3) Recurrente → cuando no es transitorio y tiene una probabilidad 1 de volver a él.

Una CdM es absorbente si tiene, al menos, un estado absorbente y si, de cualquier estado, se puede ir al estado absorbente, aunque implique dar varios pasos. Si hay más de un estado absorbente puede resultar interesante conocer en qué proporción se distribuirá la población entre los mismos. Ahora, si solo hay un estado absorbente no tiene sentido el análisis pues toda la población seguirá allí. Cuando una CdM no presenta estados absorbentes, se puede obtener un vector a largo plazo con la distribución de los estados en el futuro. (Casparri *et al.*, 2012)

Otra herramienta útil de esta metodología, aunque solo aplicable a casos sencillos, es el "Árbol de Probabilidades". El mismo es un diagrama que permiten predecir la probabilidad de que un determinado estado ocurra en el futuro. Si se considera un sistema de n estados, en el que cada ensayo tiene n resultados posibles, no se puede decir certeramente en qué estado se encontrará el mismo en un determinado momento futuro, pero se puede estimar la probabilidad de que se encuentre en cada uno de los estados 1, 2,…, n.
Conforme a lo precedente, la CdM es una estrategia apropiada para analizar la dinámica de los mercados financieros. En tal sentido, esta propuesta presenta una ejercitación desarrollada en la Asignatura "Matemática para Economistas II", que se dicta a los estudiantes de tercer año de la Carrera Licenciatura en Economía, en la FCEyS- UNMDP, aplicando conceptos matemáticos para analizar un fenómeno financiero concreto. El objetivo general es construir la Matriz de Transición de inversiones financieras y diagramar el árbol de probabilidades correspondiente.

A tal fin, se emplean datos de variaciones porcentuales inter-mensuales de rendimiento de un fondo común de inversión multiactivo global (FCI), con perfil de riesgo medio-bajo, recomendado para inversiones a más de 3 años, registrado en España por el Grupo BBVA, durante el período 01 enero-31 diciembre 2023, tomados del sitio investing.com. (Figuras 2-a y 2-b)

Figura 2-a: Datos empleados

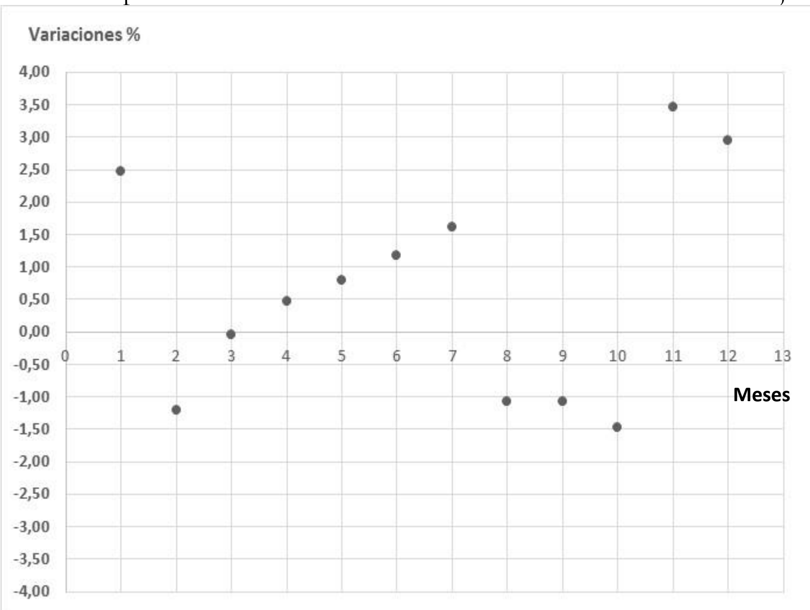


Datos históricos 172242002

Fecha	Último	Apertura	Máximo	Mínimo	% var.
Ene 2023	12,46	12,14	12,51	12,13	2,48%
Feb 2023	12,31	12,53	12,65	12,35	-1,20%
Mar 2023	12,31	12,30	12,35	12,17	-0,05%
Abr 2023	12,37	12,31	12,45	12,31	0,47%
May 2023	12,47	12,34	12,51	12,34	0,80%
Jun 2023	12,61	12,49	12,73	12,48	1,18%
Jul 2023	12,81	12,65	12,83	12,56	1,61%
Ago 2023	12,68	12,87	12,89	12,56	-1,07%
Sep 2023	12,54	12,74	12,82	12,54	-1,07%
Oct 2023	12,32	12,54	12,62	12,32	-1,74%
Nov 2023	12,75	12,31	12,77	12,31	3,47%
Dic 2023	13,13	12,76	13,13	12,76	2,95%
Máximo: 13,13	Mínimo: 12,13	Diferencia: 1,00	Promedio: 12,56		% var.: 7,93

Fuente: https://es.investing.com/funds/quality-inversion-moderada-fi-historical-data.

Figura 2-b: Comportamiento de las variaciones de rendimiento del caso bajo estudio



Microsoft Excel®

Fuente: elaboración propia.

Particularmente, se eligió España pues los fondos de inversión tuvieron un lucrativo desempeño durante el año bajo estudio (García López, 2024) y, además, no se encuentran tan afectados por un proceso inflacionario. Por su parte, los "estados" fueron establecidos siguiendo los lineamientos del criterio adoptado por Zhang & Zhang (2009) para el mercado de valores chino. Así, el primer estado agrupa las variaciones porcentuales de rendimiento que superan el 1,00%; el segundo, las variaciones porcentuales de rendimiento que oscilan entre el 1,00% y el -1,00% y el tercero, las variaciones porcentuales de rendimiento que presentan caídas mayores al 1,00%. La siguiente Tabla expone los estados:

Tabla 1: Estados para el caso bajo estudio

ene	feb	mar	abr	may	jun	jul	ago	sep	oct	nov	dic
2,48%	-1,20%	-0,05%	0,47%	0,80%	1,18%	1,61%	-1,07%	-1,07%	-1,74%	3,47%	2,95%

Meses enero, junio, julio, noviembre y diciembre	Estado 1	
Meses marzo a mayo	Estado 2	
Meses febrero y de agosto a octubre	Estado 3	

Fuente: elaboración propia.

La probabilidad de que un elemento pase del Estado 1 al Estado 1, en un solo paso, se determina por la cantidad de veces en que estando en el Estado 1 pasa al Estado 1, dividido por la cantidad de veces que estando en el Estado 1 se produzca una transición: $p_{11} = 2/4 = 0{,}50$ y, así, se procede sucesivamente para calcular el resto de las probabilidades. De esta manera, se obtiene una Matriz de Transición de orden 3x3 (i = j = 3), no presentándose estados absorbentes. (Figuras 3-a y 3-b)

Figura 3-a: Matriz de Transición genérica para el caso bajo estudio

		Siguiente		
Actual	Estados	Estado 1	Estado 2	Estando 3
	Estado 1	p_{11}	p_{12}	p_{13}
	Estado 2	p_{21}	p_{22}	p_{23}
	Estado 3	p_{31}	p_{32}	p_{33}

Fuente: elaboración propia.

Figura 3-b: Matriz de Transición aplicada al caso bajo estudio

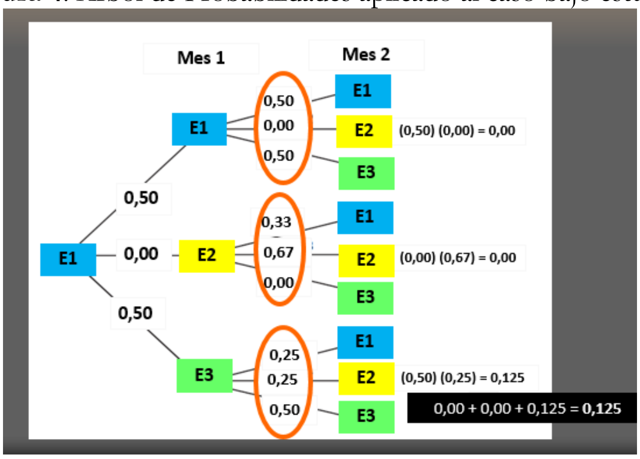
		Siguiente		
Actual	Estados	Estado 1	Estado 2	Estando 3
	Estado 1	0,50	0,00	0,50
	Estado 2	0,33	0,67	0,00
	Estado 3	0,25	0,25	0,50

Fuente: elaboración propia.

Los elementos de cada fila reflejan la probabilidad de que una variación porcentual de rendimiento se mantenga o se altere en los próximos meses. Por su parte, los elementos de cada columna reflejan la probabilidad de que una variación porcentual de rendimiento se mantenga o se extienda a los próximos meses. Se observa que el mayor poder de retención lo presenta el Estado 2 pues es el que consigna una mayor probabilidad ($p_{22} = 0{,}67$). A su vez, no hay probabilidad que del Estado 1 se pase al Estado 2 o que del Estado 2 se pase al Estado 3 ($p_{12} = p_{23} = 0{,}00$).

A continuación, se presenta el Árbol de Probabilidades correspondiente. El mismo permite determinar la probabilidad de que partiendo de un determinado estado, predomine el mismo u otro estado, luego de un período de tiempo, empleando probabilidades conjuntas. Por ejemplo, suponiendo que el Estado 1 (E1) predomina en el sistema, la probabilidad de que el Estado 2 (E2) predomine luego de dos meses es igual a 0,125. (Figura 4)

Figura 4: Árbol de Probabilidades aplicado al caso bajo estudio



Fuente: elaboración propia.

Si bien la propuesta no reviste gran complejidad matemática, la misma es una ejercitación que comprende la aplicación empírica de un tema del programa de la Asignatura. El eje de la misma es la construcción de la Matriz de Transición, a partir de datos reales, siendo lo usual, en cursos matemáticos de grado en el área de las Ciencias Económicas, el análisis de matrices ya armadas. También es de resaltar la consulta a plataformas y a literatura especializada, la vinculación con temas propios de la Asignatura "Matemática Financiera", la que se cursa en paralelo con "Matemática para Economistas II" en la FCEyS-UNMDP, y el trabajo colaborativo entre estudiantes.

BIBLIOGRAFÍA

ARYA, J. C.; LARDNER, R. W. & IBARRA MERCADO, V. C. (2009). *Matemáticas aplicadas a la Administración, Economía, Ciencias Biológicas y Sociales*. México: Pearson Educación de México, SA de CV.

BBVA Asset Mangement. https://www.bbvaassetmanagement.com/es/fondos/?ES0172242002

BUDNICK, F. (1996). *Matemáticas aplicadas para Administración, Economía y Ciencias Sociales*. México: Mc Graw Hill.

CASPARRI, M. T.; GARCÍA FRONTI, V. & MARCÓ, S. (2012, 31 mayo-01 junio). *Cadenas de Markov: un ejemplo para el sector ganadero utilizando planilla de cálculo*. [Ponencia]. XII Jornadas Nacionales de Tecnología Aplicada a la Educación Matemática Universitaria, FCE-UBA, CABA-Argentina. http://bibliotecadigital.econ.uba.ar/download/libros/Casparri_Jornada-tecnologia-matematica-12-2012.pdf/

CHIANG, A. C. & WAINWRIGHT, K. (2008). *Métodos fundamentales de Economía Matemática*. México: Mc Graw-Hill.

GARCÍA FRONTI, J. [FCE-UBA]. (2020, abril). *Introducción a las Cadenas de Markov* [Archivo de Video]. Youtube. https://www.youtube.com/watch?v=CU7FRAFsSSU

GARCÍA LÓPEZ, E. (17/03/2024). *Los fondos de inversión españoles disparan su rentabilidad más del 100% y duplican la que ofrecen los mejores extranjeros*. Infobae. https://www.infobae.com/espana/2024/03/17/los-fondos-de-inversion-espanoles-disparan-su-rentabilidad-mas-del-100-y-duplican-la-que-ofrecen-los-mejores-extranjeros/

HAEUSSLER, E. F.; PAUL, R. S. & WOOD, R. J. (2008). *Matemáticas para Administración y Economía*. México: Pearson Educación.

INVESTING. https://es.investing.com/funds/quality-inversion-moderada-fi-historical-data

LAKSHMI G. & MANOj, J. (2020, March). Application of Markov Process for prediction of stock market performance. *International Journal of Recent Technology and Engineering*, *8*(6), 1.516-1.519. https://www.ijrte.org/wp-content/uploads/papers/v8i6/F7784038620.pdf

RAPOSO, E. (2021). Un caso de aplicación de Cadenas de Markov para determinar patrones de morosidad de los clientes bancarios. *Revista de Investigación en Modelos Matemáticos aplicados a la Gestión y la Economía*, *8*(I (2021-I)), 38-51. https://www.economicas.uba.ar/wp-content/uploads/2016/04/Raposo-Eugenia.pdf

SIMON, C. P. & BLUME, L. (1994). *Mathematics for Economists*. U.S.A.: W. W. Norton & Company Inc.

ZHANG, D. & ZHANG, X. (June 2009). Study on forecasting the stock market trend based on Stochastic Analysis Method. *International Journal of Business and Management*, *4*(6), 163-170. https://www.ccsenet.org/journal/index.php/ijbm/article/view/2336