UNIVERSIDAD NACIONAL DE MAR DEL PLATA
FACULTAD DE CIENCIAS ECONOMICAS
AREA MATEMATICA

18° JORNADAS DE PROFESORES UNIVERSITARIOS DE MATEMATICA FINANCIERA

AREA TECNICA

EL PRECIO DE LAS OBLIGACIONES, DURACION, VOLATILIDAD :
Una aplicación de la Matemática Financiera

C.P.N. ALDO JOSE PITTALUGA

Mar del Plata, setiembre de 1997

I.- INTRODUCCION

El presente trabajo tiene como finalidad mostrar al alumno la aplicación concreta de las herramientas de la Matemática Financiera a distintos conceptos utilizados en el análisis de títulos de deuda.

El enfoque está dirigido a las obligaciones de renta fija y a su valuación considerando una tasa de referencia, y a las variaciones de su precio introduciendo el concepto de Duración de una Obligación como una aplicación del concepto de actualización y de utilización de la T.I.R.

También se plantea una solución para el análisis teórico sobre la variación del precio de un título ante variaciones de la tasa de rendimiento.

Finalmente se presenta un ejemplo referido al BONO DE INVERSIÓN MARPLATENSE, el cual, de reciente sanción, será utilizado por el Municipio del Partido de General Pueyrredón para la financiación de diversas obras públicas.

II.- GENERALIDADES

Cuando un ente necesita solicitar un préstamo por una suma importante fracciona su deuda en una gran número de títulos, denominados Obligaciones, los cuales son ofrecidos a los suscriptores en determinadas condiciones perfectamente establecidas, con lo cual el ente obtiene el préstamo deseado, el que por lo general es amortizado a largo plazo según algún sistema particular de reembolso de préstamos.

Podemos entonces sintetizar diciendo que una Obligación es un contrato financiero que da derecho al comprador a recibir una serie de contraprestaciones futuras a cambio de su inversión inicial.

Para el desarrollo posterior se centrará la atención en las Obligaciones con reembolso periódico de capital e intereses, en las cuales los importes de cada uno de estos pagos se encuentran claramente determinados en las condiciones de emisión.

Dado que las Obligaciones constituyen un préstamo, como tal, se pueden enumerar sus elementos sustanciales :

- El valor nominal de la Obligación
- La tasa de interés fijada al momento de la emisión
- La forma de pago de los intereses periódicos
- La fecha de vencimiento de los servicios de capital e intereses
- El precio de emisión de la Obligación
- El precio de la Obligación a un momento determinado

A los fines del presente trabajo, centraremos nuestra atención en el último de estos elementos.

III.- EL PRECIO DE UNA OBLIGACIÓN

Como ya hemos mencionado, el precio de una Obligación puede considerarse como una inversión en la que se entrega ahora dicho importe a fin de recibir en plazos futuros ciertos reembolsos en concepto de intereses y capital.

Para calcular este precio se puede aplicar el concepto de valor actual de los reembolsos futuros, de acuerdo a la siguiente relación

$$P = \sum_{t=1}^{n} \frac{Q_t}{(1+k)^t} \qquad [1]$$

donde :

P = precio de la Obligación
Qt = importe del reembolso de renta y/o amortización
n = el numero de períodos de la operación
k = tasa de actualización
i = tasa de interés fijada al momento de la emisión

La aplicación de la relación [1] implica la elección de la tasa de actualización "k" , la cual puede ser la tasa de interés que el inversor pretende obtener de su operación. Esta puede ser considerada como su costo de oportunidad ante otras operaciones de características similares. Si en el mercado financiero se encuentran operaciones comparables se podrá considerar entonces la tasa de mercado.

Esta tasa de actualización para calcular el precio, es la T.I.R. de la Obligación, o sea la tasa de descuento que iguala el valor actual de los reembolsos con el precio.

De la relación [1] se observa que el precio de la Obligación se verá modificado según las variaciones de la tasa aplicada para la actualización. Un aumento en las pretensiones del inversor se reflejarán en un aumento de la tasa requerida, y éste hará disminuir el precio de la Obligación. Una disminución en sus requerimientos provocará un resultado inverso.

Dado que el importe de los reembolsos se encuentran previamente determinados de acuerdo al contrato, el poseedor de una Obligación tiene perfectamente establecidos sus ingresos periódicos. Sobre esa base y a sus pretensiones de rendimiento al momento de la compra habrá determinado el precio mediante la aplicación de la relación [1].

De esta forma se puede decir que el comprador queda relacionado con el título hasta el vencimiento de la operación a una tasa de interés fija según haya sido el precio pagado, lo cual no presentaría inconvenientes si el inversor mantiene la inversión hasta el vencimiento y no modifica sus pretensiones en cuanto a rendimiento. Si estas pretensiones aumentan, ofrecerá un menor precio.

Interesa por lo tanto saber cuanto cambia el precio de la Obligación ante cambios en la tasa de actualización.

IV.- LA DURACIÓN

El precio de una Obligación, de acuerdo a la relación [1], es una función de la tasa "k" de actualización. Si esta varía en una cantidad "h" , la variación absoluta en el precio será :

$$\Delta P = P(k+h) - P(k)$$

y en forma aproximada :

$$\Delta P \approx h \,.\, P'(k) \qquad [2]$$

La variación relativa será :

$$\frac{\Delta P}{P} = \frac{P(k+h) - P(k)}{P(k)}$$

o sea, el cociente entre la variación del precio a las distintas tasas y el precio a la tasa original.

Aplicando la expresión aproximada [2], queda :

$$\frac{\Delta P}{P} \approx h \,.\, \frac{1}{P(k)} \,.\, P'(k) \qquad [3]$$

donde:

ΔP = variación en el precio de la Obligación
$P(k)$ = precio de la obligación a la tasa k
$P(k+h)$ = precio de la obligación a la tasa (k+h)
h = variación de la tasa de actualización
$P'(k)$ = derivada primera de la relación [1]

La relación [3] nos permite determinar en forma aproximada la variación relativa que experimenta el precio, ante una variación en la tasa de actualización.

Reemplazando valores en [3] y operando, nos queda :

$$\frac{\Delta P}{P} \approx h \cdot \frac{1}{P(k)} \cdot \sum_{t=1}^{n} \frac{(-t) \cdot Q_t}{(1+k)^{t+1}}$$

$$\frac{\Delta P}{P} \approx h \cdot \frac{-1}{(1+k)} \cdot \frac{1}{P(k)} \cdot \sum_{t=1}^{n} \frac{t.Q_t}{(1+k)^{t}}$$

$$\frac{\Delta P}{P} \approx h \cdot \frac{-1}{(1+k)} \cdot D \quad [4]$$

donde :

$$D = \frac{1}{P(k)} \cdot \sum_{t=1}^{n} \frac{t.Q_t}{(1+k)^{t}} \quad [5]$$

La relación [5] se denomina "Duración" y puede apreciarse que es igual a la suma de los reembolsos actualizados y ponderados por las plazos de sus pagos, y el total dividido por el precio.

En el caso mas simple de una préstamo reembolsable mediante un pago único comprensivo de capital e intereses, todos los reembolsos son nulos excepto el último, y en ese caso la Duración es igual al plazo de la operación.

En el caso de las Obligaciones con reembolso periódico, la Duración es inferior al plazo.

El concepto de Duración fue desarrollado por Frederick Macaulay en 1938 y hace referencia al vencimiento promedio de la corriente de flujos de caja de un titulo de renta fija.

Este tipo de medición es importante en el diseño de estrategias para la protección de inversiones financieras (inmunización) contra posibles pérdidas de capital atribuibles a variaciones en la tasa.

Mediante la aplicación las relaciones [3] ó [4] se puede calcular en forma aproximada la variación relativa del precio de una Obligación ante pequeños cambios en la tasa de valuación (k).

Esto permite tener una idea de la "Volatilidad" de una Obligación, es decir, de la sensibilidad de su precio respecto a variaciones que se produzcan en la tasa de interés.

V.- VOLATILIDAD - MEJORANDO LA APROXIMACIÓN

Para el cálculo de la variación absoluta en el precio, se puede mejorar la aproximación planteada en la expresión [2] aplicando el desarrollo de Taylor:

$$\Delta P = h \,.\, P'(k) + \frac{h^2}{2!} P''(k) + \frac{h^3}{3!} P'''(k) + \ldots$$

en el cual, considerando tres términos y trabajando con valores relativos, tenemos:

$$\frac{\Delta P}{P} \approx h \,.\, \frac{P'(k)}{P(k)} + \frac{h^2}{2!} \,.\, \frac{P''(k)}{P(k)} + \frac{h^3}{3!} \,.\, \frac{P'''(k)}{P(k)} \qquad [6]$$

Esta última expresión permite mejorar el cálculo de la variación relativa sufrida por el precio de una obligación ante variaciones en la tasa de actualización.

Se destaca que en la bibliografía sobre el tema, se suele llamar :

$$\frac{P'(k)}{P(k)} = \text{DURACIÓN MODIFICADA}$$

$$\frac{P''(k)}{P(k)} = \text{CONVEXIDAD}$$

Para el cálculo de la variación relativa del precio aplicando la expresión [6] se puede utilizar el siguiente cuadro de trabajo:

1	2	3	4	5	6
Plazos	**Flujo Original**	**Flujo Actualizado**			
(t)	**Q_t**	**$Q_t/(1+k)^t$**	**(3) . (t)**	**(4) . (t+1)**	**(5) . (t+2)**
1					
2					
3					
...					
n					
Suma Columnas		Σ (3)	Σ (4)	Σ (5)	Σ (6)

Para obtener los valores necesarios en el cálculo, se aplican las siguientes relaciones:

$$P(k) = \Sigma (3) \qquad [7]$$

$$P'(k) = \Sigma (4) \cdot \frac{-1}{(1+k)} \qquad [8]$$

$$P''(k) = \Sigma (5) \cdot \frac{1}{(1+k)^2} \qquad [9]$$

$$P'''(k) = \Sigma (6) \cdot \frac{-1}{(1+k)^3} \qquad [10]$$

Estas relaciones se desarrollan en Anexo I.

VI.- UN CASO PRACTICO : EL B.I.M.

En fecha reciente, el Departamento Ejecutivo de la Municipalidad del Partido de General Pueyrredón ha sido autorizado a contratar un empréstito denominado BONO DE INVERSIÓN MARPLATENSE (B.I.M.), destinado principalmente a la financiación de obras incluidas en el Plan de Obras Mar del Plata 2000 , el cual contempla la realización de diversas obras de infraestructura de la ciudad, a nivel vial, sanitario y turístico.

La Ordenanza respectiva, en su artículo 5o. establece:

Artículo 5o. : Autorízase al Departamento Ejecutivo a contratar un empréstito hasta la suma de Pesos Cuarenta Millones ($ 40.000.000.-) cancelable en 60 meses, con una tasa de interés nominal de hasta un doce (12%) por ciento, pago de los servicios
de intereses sobre saldos con una frecuencia máxima de seis (6) meses y amortización del capital con una frecuencia máxima de doce (12) meses, mediante la emisión de Títulos Públicos denominados BONOS DE INVERSIÓN MARPLATENSE, de valor nominal PESOS UNO ($ 1.-) cada uno. La emisión y colocación primaria no podrá efectuarse bajo la par.

Con posterioridad fueron especificadas otras características: los títulos serán de Cien Pesos ($ 100.-) ; los intereses serán de pago semestral; la amortización anual será equivalente al 12,5% para los primeros cuatro años, cancelándose el 50% restante al
cabo del quinto año.

Sobre estas bases, se plantean los reembolsos del empréstito para un sólo título de $ 100.- al 6% semestral, y se construye el cuadro para el cálculo de los distintos conceptos introducidos en el presente trabajo.

Los resultados se presentan en Anexo II .

VII.- CONCLUSIONES

De acuerdo al objetivo buscado al comienzo del presente trabajo y en función de su desarrollo, se aprecia que :

- se ejemplifica la utilización de la Matemática Financiera en el análisis de los títulos de deuda;
- se establece la relación entre distintos temas de la materia, como por ejemplo: actualización de flujo de fondos , T.I.R. , empréstitos, etc.;
- se definen de acuerdo a corrientes de opinión disponibles los conceptos de Duración, Volatilidad, Inmunización y Análisis de Sensibilidad;
- se aprecia que algunos de dichos conceptos se corresponden con los clásicos de la Matemática Financiera;
- se logra que el alumno integre conceptos, definiciones y fórmulas usuales;
- se ejemplifica con un caso de la realidad local.

ANEXO I

DESARROLLO DE RELACIONES DEL CUADRO DE TRABAJO

$$[7] \quad P(k) = \sum_{t=1}^{n} \frac{Q_t}{(1+k)^t}$$

$$[8] \quad P'(k) = \sum_{t=1}^{n} \frac{(-t).Q_t}{(1+k)^{t+1}} = \frac{-1}{(1+k)} \sum_{t=1}^{n} \frac{t.Q_t}{(1+k)^t}$$

$$[9] \quad P''(k) = \sum_{t=1}^{n} \frac{t.(t+1).Q_t}{(1+k)^{t+2}} = \frac{1}{(1+k)^2} \sum_{t=1}^{n} \frac{t.(t+1).Q_t}{(1+k)^t}$$

$$[10] \quad P'''(k) = \sum_{t=1}^{n} \frac{(-t)(t+1)(t+2)Q_t}{(1+k)^{t+3}} = \frac{-1}{(1+k)^3} \sum_{t=1}^{n} \frac{t(t+1)(t+2)Q_t}{(1+k)^t}$$

ANEXO II

EL BONO DE INVERSIÓN MARPLATENSE

Cuadro para calcular la variación relativa del precio.

1	2	3	4	5	6
Semestres	**Flujo Original**	**Flujo Actualizado**			
(t)	**Q_t**	**$Q_t/(1+k)^t$**	**(3) . (t)**	**(4) . (t+1)**	**(5) . (t+2)**
1	6.00	5.66	5.66	11.32	33.96
2	18.50	16.46	32.92	98.76	395.04
3	5.25	4.41	13.23	52.92	264.60
4	17.75	14.06	56.24	281.20	1.687.20
5	4.50	3.36	16.80	100.80	705.60
6	17.00	11.98	71.88	503.16	4.025.28
7	3.75	2.49	17.43	139.44	1.254.96
8	16.25	10.20	81.60	734.40	7.344.00
9	3.00	1.78	16.02	160.20	1.762.20
10	53.00	29.60	296.00	3.256.00	39.072.00
Suma Columnas		**100.00**	**607.78**	**5.338.20**	**56.544.84**
Derivadas			**(573.38)**	**4.750.98**	**(47.476.14)**
Derivadas / P(k)			**(5.73)**	**47.51**	**(474.76)**

Relación a aplicar :

$$\frac{\Delta P}{P} \approx h \cdot \frac{P'(k)}{P(k)} + \frac{h^2}{2!} \cdot \frac{P''(k)}{P(k)} + \frac{h^3}{3!} \cdot \frac{P'''(k)}{P(k)} \qquad [6]$$

Comparación de los resultados obtenidos con función V.A.N. de planilla de cálculo y con la relación [6] :

Tasas			Cálculo con VAN		Var % c/
(k)	(h)	(k+h)	P(k+h)	Var. %	fórm. [6]
6.00%	-2.00%	4.00%	112.48	12.48%	12.47%
6.00%	-1.00%	5.00%	105.98	5.98%	5.98%
6.00%	0.00%	6.00%	100.00	0.00%	0.00%
6.00%	1.00%	7.00%	94.50	-5.50%	-5.50%
6.00%	2.00%	8.00%	89.42	-10.58%	-10.57%
6.00%	3.00%	9.00%	84.74	-15.26%	-15.27%
6.00%	4.00%	10.00%	80.41	-19.59%	-19.63%
6.00%	5.00%	11.00%	76.41	-23.59%	-23.70%
6.00%	6.00%	12.00%	72.69	-27.31%	-27.54%
6.00%	7.00%	13.00%	69.25	-30.75%	-31.18%

BIBLIOGRAFÍA

- MARTÍNEZ ABASCAL, Eduardo
  Futuros y Opciones en la gestión de carteras.
  McGraw-Hill/Interamericana de España S.A.- Madrid - 1993.-

- DIEZ DE CASTRO, Luis y MASCAREÑAS, Juan
  Ingeniería Financiera.
  McGraw-Hill/Interamericana de España S.A.- Madrid - 1994.-

- MONDINO, Diana y PENDAS, Eugenio
  Finanzas para empresas competitivas.
  Ediciones GRANICA S.A. - Barcelona - 1994.-