UNIVERSIDAD NACIONAL
DE MAR DEL PLATA

FACULTAD DE CIENCIAS
ECONOMICAS Y SOCIALES

"Evaluación financiera de proyectos: ¿Riesgo o incertidumbre?"

Grupo de Investigación: MATEMATICA BORROSA

DR. PAULINO EUGENIO MALLO
Director

Cont. María Antonia Artola
Cont. Mónica V. García
Cont. Marcelo Galante
Cont. Diego Martínez
Cont. Mariano Enrique Pascual
Sr. Mariano Morettini

ÁREA TÉCNICA

MAR DEL PLATA, OCTUBRE DE 2001

PRÓLOGO

Algunas de las funciones del profesional en ciencias económicas es asesorar respecto a la administración del capital de trabajo, proponer y evaluar alternativas de financiamiento y determinar sus respectivos costos, evaluar proyectos de inversión e indicar sobre la conveniencia de distribuir utilidades o retenerlas.

Nuestro graduado, a través de su formación académica, se nutre de elementos de álgebra, análisis matemático, estadística descriptiva e inferencia estadística, que resultan de suma utilidad para el desarrollo de las funciones señaladas. A su vez, la Matemática Financiera le aporta el concepto del valor tiempo del dinero, entre otros temas relevantes.

En este trabajo, a partir de la interrelación de las áreas mencionadas, planteamos tres objetivos. El primero es integrar el herramental suministrado por la Estadística, Álgebra y Análisis Matemático con la Matemática Financiera. El segundo objetivo persigue introducir el conocimiento matemático en la evaluación de proyectos de inversión. Y por último, demostrar la conveniencia de la utilización de la matemática difusa en la evaluación de proyectos en situaciones de incertidumbre, logrando un mayor sinceramiento de la información y descubriendo las limitaciones de los paradigmas que se pretende cambiar.

De este modo proponemos que la Matemática Financiera actúe como un nexo integrador de los conceptos matemáticos mencionados para, posteriormente, lograr su aplicación a temas específicos de contabilidad y administración.

Por último, es necesario destacar que no planteamos una rivalidad de la Matemática de la Certeza, el Cálculo de Probabilidades y la Matemática Borrosa como herramientas válidas para resolver los problemas que plantea la ciencia de la administración y la contabilidad sino que, por el contrario, todas ellas concurren en auxilio del

profesional para realizar su aporte de acuerdo al contexto en el que deba operarse: certeza, riesgo e incertidumbre.

1. INTRODUCCIÓN

Como todos sabemos, la Matemática tradicional parte del principio aristotélico denominado del *tercero excluído,* al que se suele referir de la siguiente manera: A o no A. Es decir, sólo existen dos alternativas (de ahí el nombre del principio): que sea A o que sea no A. De esta manera, si decimos que el desvío standard de la variable “altura de las personas habitantes de la Argentina” es de 0,35 metros, la alternativa *A* sería que efectivamente el desvío standard referido sea 0,35 metros, y la alternativa *no A* es que dicho desvío standard no sea 0,35 metros.

En algunas oportunidades, distintos matemáticos de la comunidad científica han dudado sobre la total adaptación de la Matemática fundada en el principio del tercero excluído a la realidad donde debe ser aplicada. Así, por ejemplo, Albert Einstein llegó a decir que *“en la medida en que las leyes de las matemáticas se refieran a la realidad, no son ciertas. Y en la medida en que son ciertas, no se refieren a la realidad*"[1].

Si pensamos, por ejemplo, en la calificación de las personas como altas, la alternativa *A* sería que la persona es alta, y la alternativa *no A*, que la persona no es alta. Sin embargo, no es difícil concluir que en la realidad todas las personas son altas, en mayor o menor grado, por lo tanto, la clasificación en altas o no altas no es del todo correcta: hay personas más altas y hay personas menos altas. En estos casos el principio del tercero excluído pierde practicidad.

Esta disociación parcial entre la Matemática y la realidad ha llevado al surgimiento de la lógica multivalente, en la que se deja de lado el principio del tercero excluído para considerar todas las alternativas que van del A al *no* A, del 1 al 0.

Esta lógica multivaluada, o difusa, ha sido el sustento del desarrollo de la Matemática Borrosa, o Matemática Difusa, que ha venido a dar solución a aquellas situaciones en las que la Matemática tradicional presenta falencias.

La Matemática tradicional es de un valor incalculable cuando se trabaja en condiciones de certeza, porque podemos afirmar que algo es A, pero cuando nos enfrentamos a la incertidumbre, ya no podemos considerar sólo dos alternativas, se hace necesario recurrir a la Matemática Borrosa, la que trabaja con infinitas alternativas intermedias entre el A y el *no* A.

Cuando comenzó a difundirse este nuevo paradigma, muchos argumentaron que la borrosidad es probabilidad encubierta, sin embargo esto no es así y para brindar una posible explicación del por qué es que realizamos el presente trabajo, partiendo de la comparación de un número borroso triangular (NBT) con la distribución triangular.

2. LOS NÚMEROS BORROSOS TRIANGULARES[a]

Como hemos dicho, en situaciones donde la información con la que se trabaja es cierta, la Matemática tradicional es de correcta aplicación y significa una herramienta por demás útil, sin embargo, atento a que decidimos en un marco de incertidumbre, la Matemática Borrosa nos permitirá tomar mejores decisiones.

Veamos un ejemplo concreto para lograr una mayor comprensión: en una empresa, el punto de equilibrio es aquel nivel de ventas para el cual el total de las mismas es igual al total de costos. Si deseáramos calcular el punto de equilibrio del presente ejercicio, para el cual fueran ciertos el precio de nuestros

[a] El presente parágrafo sólo persigue el fin de introducir al lector en los conceptos básicos de los números borrosos triangulares.

productos, el total de costos fijos y los costos variables unitarios, no se presentarían problemas en plantear las ecuaciones respectivas con la Matemática tradicional y despejar luego la cantidad de equilibrio.

Sin embargo, si lo que pretendemos es encontrar el punto de equilibrio para el ejercicio siguiente, ¿podemos afirmar con total seguridad que el precio al que venderemos nuestro producto será, por ejemplo, \$8 y que nuestros costos variables unitarios serán de \$2,5? Si trabajamos con la Matemática tradicional deberemos utilizar dichos valores, a pesar de que no podemos garantizar que las variables enunciadas tomarán esos valores y no otros. Si, en cambio, trabajamos con Matemática Difusa, podremos incluir todos los valores posibles que pueden tomar dichas variables, dentro de un mínimo y hasta un máximo.

Entre los distintos elementos de la Matemática Borrosa decidimos valernos de los números borrosos triangulares.

Un número borroso triangular (NBT) puede definirse como aquel subconjunto borroso que se halla formado por una secuencia finita o infinita de intervalos de confianza, que surgen de asignar un nivel de confianza α a los valores de un conjunto referencial dado, el que define su grado de pertenencia; medido a través de sus funciones características de pertenencia ($\mu_{(x)}$) lineales.

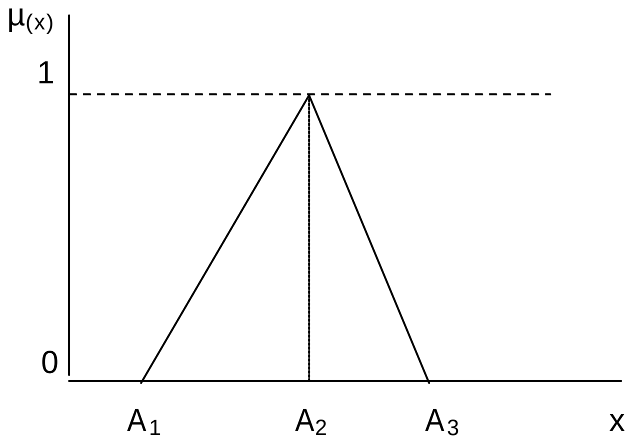
El número borroso triangular puede expresarse como un número impreciso: $\underset{\sim}{A} = (a_1, a_2, a_3)$ siendo $a_1 \leq a_2 \leq a_3$, lo que implica simplicidad en su expresión como también en las operaciones entre ellos. Posee tres valores críticos:

a) un valor central cuyo nivel de confianza α es igual a 1. Generalmente este valor proviene de un estudio técnico exhaustivo de la variable analizada;
b) dos valores extremos cuyos niveles de confianza α son iguales a cero. El estudio nos permite definir que la variable no tomará valores más allá de dichos extremos.

Supongamos lo siguiente: si A_0 es una unidad presupuestaria cuyo número borroso triangular es igual a (13;15;22), el valor de 15 unidades monetarias, proviene del estudio técnico realizado y por lo tanto su nivel de confianza es igual a uno, y además sabemos que el valor que adoptará la unidad presupuestaria no se ubicará fuera de los extremos 13 y 22, cuyos niveles de confianza son iguales a cero.

También se lo expresa a través de sus funciones características de pertenencia. Es decir, como un número borroso en el que sus límites $\forall 0 \leq \alpha \leq 1$ están representados por $\mu_{(x)}$ lineales, y cuando $\alpha = 1$, dichas funciones se intersectan.

Veamos el siguiente gráfico para facilitar la comprensión de la herramienta utilizada:



Donde $\mu_{(x)}$ representa el grado de confianza, que va desde cero hasta uno.

También podemos representar los números borrosos a través de la función $m_{\tilde{A}}(x)$ que indica los niveles de confianza α de dicho número borroso para cada valor $x \in R$. Para ello, habrá que determinar la función $m_{\tilde{A}}i(x)$ a la izquierda del valor central del número borroso y la función $m_{\tilde{A}}d(x)$ a la derecha del mismo valor, debiendo cumplirse para un determinado valor de x la siguiente igualdad:

$$m_{\underset{\sim}{A}} i(x) = 1 = m_{\underset{\sim}{A}} d(x)$$

Por ejemplo, el NBT A=[-4;1;4] puede representarse de la siguiente manera:

$\forall x \in R:$

$m_{\underset{\sim}{A}}(x) = 0$ si x = -4

$m_{\underset{\sim}{A}}(x) = \dfrac{x+4}{5}$ si –4 = x = 1

$m_{\underset{\sim}{A}}(x) = \dfrac{-x+4}{3}$ si 1 = x = 4

$m_{\underset{\sim}{A}}(x) = 0$ si 4 = x

Las operaciones básicas y generales con NBTs se realizan de la siguiente manera:

a) para sumar dos NBTs simplemente se suman los valores mínimos, más posibles y máximos para obtener el valor mínimo, más posible y máximo del NBT resultante. Por ejemplo: si A = [8;10;13] y B = [2;5;9], será A+B= [10;15;22]

b) para restar dos NBTs, generalmente se resta del valor mínimo del primer NBT el máximo del segundo, obteniéndose el mínimo del resultante; el de mayor confianza se obtiene restándole al primer valor central el segundo; y el máximo del NBT resultante se obtendrá de restar el mínimo del segundo del máximo del primero. Por ejemplo: A-B=[-1;5;11]

c) para la multiplicación de NBTs deberán multiplicarse el mínimo del primero por el mínimo y el máximo del segundo y el máximo del primero por el mínimo y el máximo del segundo, siendo el menor de los cuatro resultados obtenidos el mínimo del NBT resultante y el máximo de aquellos cuatro valores el máximo del nuevo NBT. El valor central se obtendrá multiplicando los valores centrales de los factores. Por ejemplo: A(.)B = [16;50;117]

d) para la división de NBTs se procederá de manera análoga a la multiplicación, pero el divisor será el inverso del segundo NBT, cuyo mínimo será el inverso del máximo del segundo NBT, el máximo será el inverso del mínimo de dicho NBT y el más confiable será el inverso del más confiable de aquel NBT. Por ejemplo: A(:)B = [0,88;2;6,5]

Debido a la similitud entre la representación gráfica de un NBT y la representación gráfica de la distribución triangular, se ha sugerido que no existen diferencias, sin embargo, después de realizar un análisis de dicha distribución, nos abocaremos a explicar sus diferencias.

3. LOS NBTs Y LA DISTRIBUCIÓN TRIANGULAR

Hemos expuesto ya las generalidades sobre los NBTs y un estudio de la distribución triangular, que se encuentra en el Anexo I. Si $Q_p = A_1$; $Q_m = A_2$ y $Q_o = A_3$, la representación gráfica del NBT y de la distribución triangular serán similares, el intervalo que consideran es el mismo y ambos tendrán un idéntico valor como más posible o más probable, respectivamente.

Ante estas similitudes resulta forzoso preguntarse cuáles son las diferencias que justifican la utilización de la lógica borrosa y no la clásica y por demás útil probabilidad.

La principal diferencia entre ambos métodos es que uno parte del ya explicado principio del tercero excluído (la distribución triangular) mientras que el otro (los NBTs) lo descartan.

Además, si bien al representar gráficamente a ambos observamos que poseen igual eje de abscisas, no sucede lo mismo con las ordenadas, ya que la distribución triangular mide frecuencia y los NBTs nivel de confianza.

Creemos que se ganará en comprensión si proponemos un ejemplo concreto en lugar de continuar teorizando sobre aquello que diferencia a ambos métodos.

Tomemos por caso una empresa que está evaluando la conveniencia o no de expandir su actividad, añadiendo, por ejemplo, la fabricación de camisas a la de remeras.

Uno de los métodos más tradicionales para la evaluación de proyectos de inversión es el del *Valor Actual Neto (VAN)*, que se obtiene de sumar los distintos flujos de fondos futuros, actualizados por una tasa.

Supongamos que el proyecto signifique una inversión inicial en capital de trabajo y en maquinarias de $25.000, y que se estima en los cinco años siguientes producirá ingresos adicionales netos de $4.000, $5.000, $6.100, $5.400 y $4.500. Si bien la suma de los ingresos es igual a los egresos, el proyecto no es recomendable, porque los $25.000 de inversión se deben pagar en el momento inicial, mientras que los ingresos se irán obteniendo con el correr del tiempo. En conclusión, para hacer comparables esos importes deben actualizarse por una tasa de interés "k", determinándose el VAN de la siguiente manera:

$$VAN = -FFN_0 + \frac{FFN_1}{(1+k)} + \frac{FFN_2}{(1+k)^2} + \ldots + \frac{FFN_n}{(1+k)^n}$$

La regla de decisión será que se recomiendan aquellos proyectos con VAN positivo y no aquellos con VAN negativo, siendo indiferentes los que posean un VAN de cero.

En el ejemplo que presentamos no habría dificultades en el cálculo del VAN. Si suponemos que k=0,05, tendremos:

$$VAN = -25.000 + \frac{4.000}{1,05} + \frac{5.000}{1,05^2} + \frac{6.100}{1,05^3} + \frac{5.400}{1,05^4} + \frac{4.500}{1,05^5} = -3.417,46$$

Dado que obtuvimos un VAN negativo, no se recomienda el proyecto.

Ahora bien, ¿podemos asegurar que los flujos de fondos netos serán de $4.000, $5.000, $6.100, $5.400 y $4.500 para el primero, segundo, tercero, cuarto y quinto año respectivamente? Lo lógico es que no podamos. Sencillamente son aquellos valores en los que más confianza tenemos, pero no que serán ellos con certeza.

La teoría de las probabilidades ha propuesto un avance en la evaluación de proyectos de inversión al suponer que cada flujo de fondos neto futuro es una variable aleatoria que responde a una distribución de probabilidad. Se suelen usar, para tal fin, la distribución normal, la distribución beta y, en menor medida, la distribución triangular. En realidad no podemos afirmar que la variable en estudio sigue una distribución triangular, como tampoco podemos hacerlo para ninguna otra función de distribución, pero el argumento que se utiliza para hacer uso de tal distribución es la simplicidad, ya que sólo es necesario proponer un valor pesimista, otro optimista y uno intermedio más probable.

En el ejemplo siguiente utilizaremos la distribución triangular con el fin de lograr una mejor comparación con los NBTs, aunque las conclusiones serán válidas para cualquier distribución que se utilice.

Supongamos que el proyecto en evaluación tiene una vida útil de cinco años, y que los flujos de fondos futuros esperados son:

$FFN_0 = -25.000$

FFN_1: Q_p=1.000 Q_m=4.000 Q_o=6.700

FFN_2: Q_p=2.000 Q_m=5.000 Q_o=8.500

FFN_3: Q_p=3.200 Q_m=6.100 Q_o=9.300

FFN_4: Q_p=3.400 Q_m=5.400 Q_o=7.050

FFN_5: Q_p=2.900 Q_m=4.500 Q_o=5.850

La inversión inicial es cierta, por lo que no posee un valor pesimista y otro optimista, está liberada de incertidumbre.

Con estos valores, y con las fórmulas que ya presentamos en el Anexo I al analizar la distribución triangular, podemos obtener las medias de los flujos de fondos futuros esperados:

m_1 = 3.900

m_2 = 5.166,67

m_3 = 6.200

m_4 = 5.283,33

m_5 = 4.416,67

Con estos valores, y suponiendo que la tasa de interés que se adopte es cierta, a efectos de simplificar el ejemplo, el VAN obtenido será:

$$VAN = -25.000 + \frac{3.900}{1,05} + \frac{5.166,67}{1,05^2} + \frac{6.200}{1,05^3} + \frac{5.283,33}{1,05^4} + \frac{4.416,67}{1,05^5} = -3.436,41$$

Como vemos, el VAN resultante también es negativo, por lo que se llega a la misma decisión: no llevar a cabo el proyecto. Además, la diferencia entre el VAN obtenido de esta manera y aquel que obtuvimos sin considerar incertidumbre es mínima. Esto ocurre porque la media de cada flujo de fondo neto esperado es muy similar al valor central, es decir, el triángulo que cada uno describiría es casi simétrico, pero no siempre ambos VAN se asemejan tanto.

Veremos ahora que sucede si calculamos el VAN con NBTs[b]:

$$VAN = -25.000 + \frac{(1.000;4.000;6.700)}{1,05} + \frac{(2.000;5.000;8.500)}{1,05^2} + \frac{(3.200;6.100;9.300)}{1,05^3} +$$

$$+ \frac{(3.400;5.400;7.050)}{1,05^4} + \frac{(2.900;4.500;5.850)}{1,05^5} = (-14.399,83;-3.417,37;7.508,20)$$

Este resultado se interpreta de la manera siguiente: el proyecto tendrá un VAN que se encontrará entre una pérdida de \$14.399,83 y una ganancia de \$7.508,20, siendo lo más posible que sea una pérdida de \$3.417,37.

[b] Lo que se busca aquí es comparar los resultados de la aplicación de la Matemática Borrosa con aquellos obtenidos mediante el uso de la Teoría de las Probabilidades, por lo que el ejemplo de evaluación de proyectos de inversión presenta algunas simplificaciones. Si el lector está interesado en un análisis más exhaustivo del tema con NBTs puede consultar el trabajo *Flujos de fondos proyectados en situación de incertidumbre*, del Grupo de Investigación de Matemática Borrosa de la FCEyS de la UNMdP, publicado en los Anales del XIII Congreso Nacional de Profesionales en

4. CONCLUSIONES

En el ejemplo desarrollado anteriormente observamos la gran diferencia entre ambos métodos. Trabajando con la distribución triangular obtenemos un VAN negativo pero, con NBTs, si bien arribamos a la conclusión de que lo más posible es que el proyecto tenga un VAN negativo, se considera la posibilidad de que posea un VAN positivo. Con la distribución triangular no nos queda más alternativa que rechazar el proyecto, con la Matemática Borrosa, en cambio, vemos que existe la posibilidad de que el proyecto sea rentable, si bien no es lo más posible.

Otra diferencia la encontramos cuando comparamos los flujos de fondos netos considerados en cada caso. Tomemos el primer período, mediante la distribución triangular calculamos una media de $3.900, este es un claro ejemplo de por qué decimos que la teoría de probabilidades se basa en el principio del tercero excluído: los flujos de fondos netos del primer año, se afirma, serán de $3.900, que sería la alternativa *A*. Dichos flujos de fondos serán de $3.900, o no, no existe una tercera alternativa. No importa como hayamos arribado a ese valor, no importa que sea una media que surja de considerar todos los valores posibles que puede tomar la variable en cuestión, se elige un valor y sólo uno, los flujos de fondos para el primer año serán de $3.900 o no serán de $3.900. En cambio, los NBTs consideran todos los valores posibles que puede tomar la variable y con todos ellos trabaja para llegar al resultado final, que, es cierto, no goza de la misma precisión que los resultados que pueden obtenerse con la Matemática tradicional, pero no tiene menos exactitud. El NBT resultante es menos preciso que un número cierto, pero se condice más con la realidad, otorga sinceramiento a la información, evita la falacia de considerar como cierto a algo que no lo es,

---

Ciencias Económicas, Área Contabilidad y Auditoría, llevado a cabo en Bariloche en octubre de 2000.

porque en definitiva, cuando decimos que los flujos de fondos netos para el primer período serán de $3.900 es eso lo que hacemos: somos conscientes de que no podemos asegurar qué valor adoptará la variable el año próximo, pero actuamos como si pudiéramos.

Es cierto que resulta más simple trabajar con números precisos, pero, lamentablemente, el mundo real nos plantea muchas situaciones imprecisas, las cuales no pueden ser tratadas adecuadamente mediante la lógica bivalente del tercero excluído.

Alguien podría argumentar que es cierto que al trabajar con un único valor para cada flujo de fondos netos estamos dejando de lado la distribución de los valores, pero que para salvar esa limitación podemos incluir el desvío standard, de manera que calculando el desvío standard de cada flujo de fondos neto podemos obtener el desvío standard del VAN, arribando a un resultado compatible con el de la Matemática Borrosa.

En nuestro ejemplo sería:

$s_0 = 0$

$s_1 = 1.164{,}04$

$s_2 = 1.328{,}11$

$s_3 = 1.245{,}66$

$s_4 = 746{,}19$

$s_5 = 602{,}89$

Por lo tanto la variancia del VAN será:

$$s^2(VAN) = 0 + \frac{1.354.989{,}12}{1{,}05^2} + \frac{1.763.876{,}17}{1{,}05^4} + \frac{1.551.668{,}84}{1{,}05^6} + \frac{556.799{,}52}{1{,}05^8} + \\ + \frac{363.476{,}35}{1{,}05^{10}} = 4.438.046{,}32$$

Por lo tanto, el desvío standard del VAN será: $2.106,67.

Así, disponiendo de la media y del desvío standard del VAN y, suponiendo que tal variable sigue una distribución normal, podrían afirmar que existe un

68,26% de probabilidad de que el VAN se encuentra entre –5.543,08 y –1.329,74, que es un desvío standard a la izquierda y uno a la derecha de la media, respectivamente.

Sin embargo, así no evita el principio del tercero excluído: el VAN del proyecto será de entre –5.543,08 y –1.329,74 o no. Lo único que hicimos es ampliar el rango de A, pero sigue habiendo dos alternativas.

Es probable que el VAN se encuentre dentro de dicho intervalo, pero no podemos asegurarlo. En cambio, sí podemos afirmar que se encontrará entre el valor mínimo y el máximo del NBT obtenido. Por supuesto, el NBT de cada flujo de fondo neto deberá ser fijado por un *experto* en la materia y no en forma arbitraria.

Frente a un contexto de constante cambio, la información que brinda una estimación en términos de certeza (Matemática tradicional) resultará más inexacta que una estimación en términos difusos, ya que ambas son realizadas en el campo de la incertidumbre.

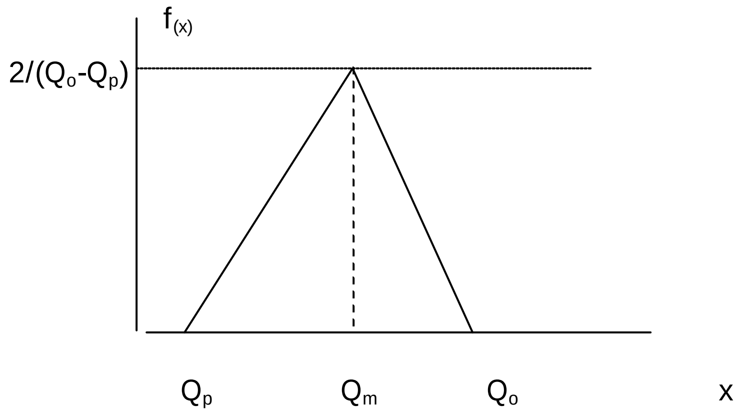
Para cuantificar la imprecisión tampoco resultan adecuadas las técnicas probabilísticas, ya que aceptaríamos la equivalencia entre los fenómenos imprecisos y los aleatorios. Por lo tanto, al apartarnos del paradigma del tercero excluído logramos un acercamiento a la realidad.

De este modo, en relación a la modelización y resolución de problemas en ambientes inciertos la Matemática Borrosa "nos permitirá, a falta de ser más exactos, ser más honestos"[2] mejorando la información necesaria para la toma de decisiones.

ANEXO I

LA DISTRIBUCIÓN TRIANGULAR

La distribución triangular poseerá, también, tres valores de referencia: un valor mínimo o pesimista, un valor medio y un valor máximo u optimista. La representación gráfica de tal distribución será la siguiente:



Sabemos que la superficie del triángulo es igual a 1, porque dicha superficie contendrá el 100% de los datos, es decir: (b.h)/2 = 1. Como la base es (Q_0 – Q_p), por despeje obtenemos la altura:

$$h = \frac{2}{Q_o - Q_p}$$

Con este dato podemos obtener la función de dominio [Q_p,Q_m], dado que tenemos dos puntos por donde pasa la recta, a saber: (Q_p,0) y (Q_m,2/Q_o–Q_m).

Dicha función será, entonces:

$$Y_1 = \frac{-2Q_p}{(Q_o - Q_p)(Q_m - Q_p)} + \frac{2}{(Q_o - Q_p)(Q_m - Q_p)}x \qquad \forall x \in [Q_p ; Q_m]$$

Análogamente podemos obtener la función de dominio [Q_m,Q_o], ya que conocemos dos puntos pertenecientes a tal función lineal: (Q_m,2/Q_o-Q_p) y (Q_o,0).

La función buscada será:

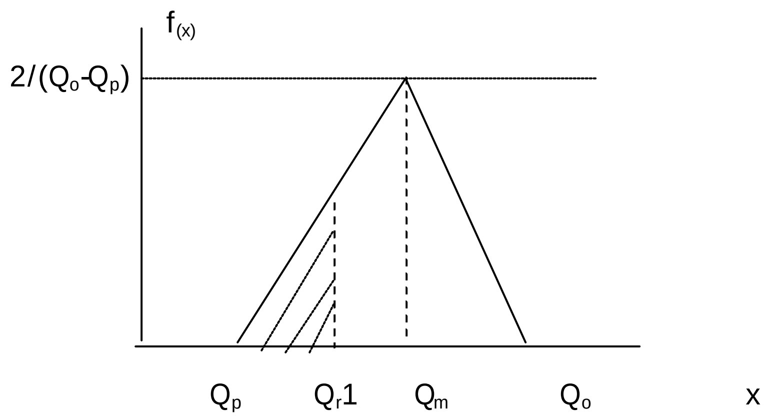
$$Y_2 = \frac{2Q_o}{(Q_o - Q_p)(Q_o - Q_m)} - \frac{2}{(Q_o - Q_p)(Q_o - Q_m)}x \qquad \forall x \in [Q_m ; Q_p]$$

Ambas funciones encontradas serían asimilables a las funciones $m_{\tilde{A}}i(x)$ y $m_{\tilde{A}}d(x)$ de los números borrosos.

<u>Funciones de distribución:</u>

Disponiendo de las funciones encontradas anteriormente podemos calcular las funciones de distribución.

Supongamos que deseamos saber qué porcentaje de los datos se encuentran comprendidos entre Q_p y Q_{r1}, siendo Q_p=Q_{r1}=Q_m. Para responder a tal requerimiento debe calcularse el área que posee el triángulo resultante, tal como se puede apreciar en el siguiente gráfico:

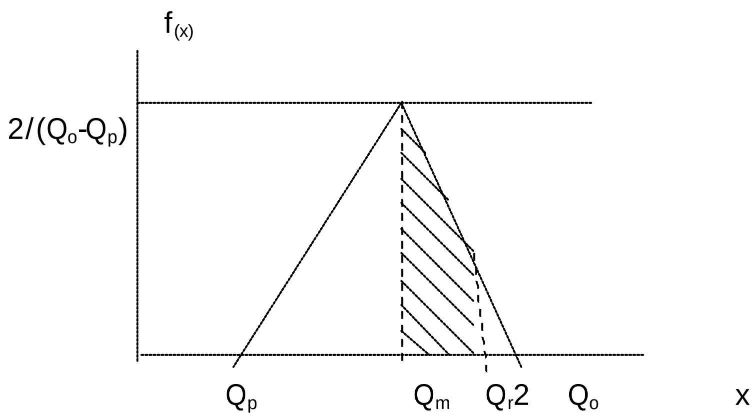


El área de ese triángulo responderá, como sabemos, a la fórmula base por altura sobre dos, siendo la base Q_{r1}-Q_p y la altura $\dfrac{2(Q_{r1}-Q_p)}{(Q_o-Q_p)(Q_m-Q_p)}$, por lo tanto el área del triángulo, que representará la función de distribución para $Q_p<Q_{r1}<Q_m$, será:

$$F_{(0)1}=\frac{(Q_{r1}-Q_p)^2}{(Q_o-Q_p)(Q_m-Q_p)}$$

Si, por el contrario, tenemos que Q_m=Q_{r2}=Q_o, debemos encontrar el área no ya de un triángulo, sino de un trapecio con base Q_{r2}-Q_m y altura $\left[\dfrac{2(Q_o-Q_{r2})}{(Q_o-Q_p)(Q_o-Q_m)}+\dfrac{2}{(Q_o-Q_p)}\right]\dfrac{1}{2}$, por lo tanto, la función de distribución para $Q_m<Q_{r2}<Q_o$ será:

$$F_{(0)2} = (Q_{r2} - Q_m)\frac{(Q_o - Q_{r2}) + (Q_o - Q_m)}{(Q_o - Q_p)(Q_o - Q_m)}$$



Por supuesto, para obtener el área total acumulada habría que sumarle al resultado de esta última fórmula aquel que se obtenga con la fórmula anterior ($F_{(0)1}$) para $Q_{r1}=Q_m$

<u>Media, desvío standard, asimetría y curtosis:</u>

Para el cálculo de estas cuatro medidas utilizaremos los momentos absolutos y centrados.

Sabiendo que, para distribuciones continuas, los momentos absolutos responden a la siguiente ecuación:

$$m_s = \int_a^b x^s f_{(x)} dx$$

Y que, para el mismo tipo de distribución, los momentos centrados se calculan mediante la ecuación siguiente:

$$m_s = \int_a^b (x-m)^s f_{(x)} dx$$

Procederemos a determinar las características planteadas.

MEDIA: la media es el momento absoluto de orden uno, es decir $m_1 = \int_a^b x f_{(x)} dx$, pero tenemos dos $f_{(x)}$, por lo tanto habrá que calcular una media para cada una y luego sumarlas para obtener la media de la distribución. Tenemos, entonces:

$$m_1 1 = \int_{Q_p}^{Q_m} \left[\frac{-2Q_p}{(Q_o - Q_p)(Q_m - Q_p)} x + \frac{2}{(Q_o - Q_p)(Q_m - Q_p)} x^2 \right] dx =$$

$$= \left[\frac{-Q_p}{(Q_o - Q_p)(Q_m - Q_p)} x^2 + \frac{2}{(Q_o - Q_p)(Q_m - Q_p)} \frac{x^3}{3} \right]_{Q_p}^{Q_m} =$$

$$= \frac{Q_p^3 - 3Q_p Q_m^2 + 2Q_m^3}{3(Q_o - Q_p)(Q_m - Q_p)}$$

y, por el otro lado:

$$m_1 2 = \int_{Q_m}^{Q_o} \left[\frac{2Q_o}{(Q_o - Q_p)(Q_o - Q_m)} x - \frac{2}{(Q_o - Q_p)(Q_o - Q_m)} x^2 \right] dx =$$

$$= \left[\frac{Q_o}{(Q_o - Q_p)(Q_o - Q_m)} x^2 - \frac{2}{(Q_o - Q_p)(Q_o - Q_m)} \frac{x^3}{3} \right]_{Q_m}^{Q_o} =$$

$$= \frac{Q_o^3 - 3Q_o Q_m^2 + 2Q_m^3}{3(Q_o - Q_p)(Q_o - Q_m)}$$

Por lo tanto, la media de la distribución será:

$$m_1 = m_1 1 + m_1 2 = \frac{Q_p^3 - 3Q_p Q_m^2 + 2Q_m^3}{3(Q_o - Q_p)(Q_m - Q_p)} + \frac{Q_o^3 - 3Q_o Q_m^2 + 2Q_m^3}{3(Q_o - Q_p)(Q_o - Q_m)} =$$

$$\boxed{m_1 = \frac{Q_p^3 (Q_o - Q_m) - Q_m^3 (Q_o - Q_p) + Q_o^3 (Q_m - Q_p)}{3(Q_o - Q_m)(Q_o - Q_p)(Q_m - Q_p)}}$$

VARIANCIA: concepto que corresponde al momento centrado de segundo orden, será calculado como se indicara, a través de los momentos absolutos, considerando que $s^2 = m_2 - m_1^2$.

El segundo sumando lo obtenemos fácilmente, elevando al cuadrado la media de la distribución obtenida recientemente.

El primer sumando es el momento absoluto de orden dos, que responde a la siguiente ecuación: $m_2 = \int_a^b x^2 f_{(x)} dx$.

Como se explicara cuando calculamos la media, disponemos de dos $f_{(x)}$, por lo tanto, deberemos obtener un m_2 para cada una de ellas y luego, sumándolas, daremos con el momento absoluto de orden dos para la distribución.

$$m_2 1 = \int_{Q_p}^{Q_m} \left[\frac{-2Q_p}{(Q_o - Q_p)(Q_m - Q_p)} x^2 + \frac{2}{(Q_o - Q_p)(Q_m - Q_p)} x^3 \right] dx =$$

$$= \left[\frac{-2Q_p}{(Q_o - Q_p)(Q_m - Q_p)} \frac{x^3}{3} + \frac{2}{(Q_o - Q_p)(Q_m - Q_p)} \frac{x^4}{4} \right]_{Q_p}^{Q_m} =$$

$$= \frac{2Q_p^4 - 8Q_p Q_m^3 + 6Q_m^4}{12(Q_o - Q_p)(Q_m - Q_p)}$$

y, por el otro lado:

$$m_2 2 = \int_{Q_m}^{Q_o} \left[\frac{2Q_o}{(Q_o - Q_p)(Q_o - Q_m)} x^2 - \frac{2}{(Q_o - Q_p)(Q_o - Q_m)} x^3 \right] dx =$$

$$= \left[\frac{2Q_o}{(Q_o - Q_p)(Q_o - Q_m)} \frac{x^3}{3} - \frac{2}{(Q_o - Q_p)(Q_o - Q_m)} \frac{x^4}{4} \right]_{Q_m}^{Q_o} =$$

$$= \frac{2Q_o^4 - 8Q_o Q_m^3 + 6Q_m^4}{12(Q_o - Q_p)(Q_o - Q_m)}$$

Entonces, el momento absoluto de orden dos de la distribucón será:

$$m_2 = m_2 1 + m_2 2 = \frac{2Q_p^4 - 8Q_p Q_m^3 + 6Q_m^4}{12(Q_o - Q_p)(Q_m - Q_p)} + \frac{2Q_o^4 - 8Q_o Q_m^3 + 6Q_m^4}{12(Q_o - Q_p)(Q_o - Q_m)} =$$

$$m_2 = \frac{Q_p^4(Q_o - Q_m) - Q_m^4(Q_o - Q_p) + Q_o^4(Q_m - Q_p)}{6(Q_o - Q_m)(Q_o - Q_p)(Q_m - Q_p)}$$

Tenemos ahora los momentos absolutos de orden uno y dos, restándole a este último el cuadrado del primero, obtendremos la variancia de la distribución, cuya raíz cuadrada, como es sabido, es el desvío standard de la distribución.

ASIMETRÍA: la asimetría de la distribución se calcula haciendo el cociente entre el momento centrado de orden tres y el cubo del desvío standard de la distribución, es decir:

$$A = \frac{m_3}{s^3}$$

Ahora bien, el momento centrado de orden tres puede ser obtenido mediante momentos absolutos, de la siguiente manera:

$$m_3 = m_3 - 3m_2 m_1 + 2m_1^3$$

Los momento absolutos de orden uno y dos ya fueron calculados, por lo que resta únicamente conocer el momento absoluto de orden tres.

Dicho momento absoluto de orden tres puede ser calculado así: $m_3 = \int_a^b x^3 f_{(x)} dx$

Reiterando que, como disponemos de dos funciones, deberemos obtener el momento absoluto de orden tres para cada una de ellas y luego sumarlos, para arribar al momento absoluto de orden tres de la distribución.

$$m_3 1 = \int_{Q_p}^{Q_m} \left[\frac{-2Q_p}{(Q_o - Q_p)(Q_m - Q_p)} x^3 + \frac{2}{(Q_o - Q_p)(Q_m - Q_p)} x^4 \right] dx =$$

$$= \left[\frac{-2Q_p}{(Q_o - Q_p)(Q_m - Q_p)} \frac{x^4}{4} + \frac{2}{(Q_o - Q_p)(Q_m - Q_p)} \frac{x^5}{5} \right]_{Q_p}^{Q_m} =$$

$$= \frac{2Q_p^5 - 10Q_p Q_m^4 + 8Q_m^5}{20(Q_o - Q_p)(Q_m - Q_p)}$$

Utilizando la segunda función tendremos:

$$m_3 2 = \int_{Q_m}^{Q_o} \left[\frac{2Q_o}{(Q_o - Q_p)(Q_o - Q_m)} x^3 - \frac{2}{(Q_o - Q_p)(Q_o - Q_m)} x^4 \right] dx =$$

$$= \left[\frac{2Q_o}{(Q_o - Q_p)(Q_o - Q_m)} \frac{x^4}{4} - \frac{2}{(Q_o - Q_p)(Q_o - Q_m)} \frac{x^5}{5} \right]_{Q_m}^{Q_o} =$$

$$= \frac{2Q_o^5 - 10Q_o Q_m^4 + 8Q_m^5}{20(Q_o - Q_p)(Q_o - Q_m)}$$

Por lo tanto, el momento absoluto de orden tres de la distribución será:

$$m_3 = m_3 1 + m_3 2 = \frac{2Q_p^5 - 10Q_p Q_m^4 + 8Q_m^5}{20(Q_o - Q_p)(Q_m - Q_p)} + \frac{2Q_o^5 - 10Q_o Q_m^4 + 8Q_m^5}{20(Q_o - Q_p)(Q_o - Q_m)} =$$

$$\boxed{m_3 = \frac{Q_p^5 (Q_o - Q_m) - Q_m^5 (Q_o - Q_p) + Q_o^5 (Q_m - Q_p)}{10(Q_o - Q_m)(Q_o - Q_p)(Q_m - Q_p)}}$$

Tenemos ahora los momentos absolutos de orden uno, dos y tres, con los cuales podrá calcularse el momento centrado de orden tres, como ya se indicara, es decir: al momento absoluto de orden tres se le suma el doble producto del cubo del momento absoluto de orden uno y se le resta el triple producto del momento absoluto de orden dos multiplicado por el momento absoluto de orden uno.

Finalmente, se divide este valor por el cubo del desvío standard, que también fue calculado con anterioridad, y se llega al valor de asimetría buscado.

<u>CURTOSIS:</u> también podemos calcular una medida de curtosis mediante la utilización de momentos centrados y absolutos, ya que:

$$K = \frac{m_4}{s^4}$$

Ahora bien, el momento centrado de orden cuatro también puede obtenerse mediante momentos absolutos, de la siguiente forma:

$$m_4 = m_4 - 4m_3 m_1 + 6m_2 m_1^2 - 3m_1^4$$

Como puede observarse, para obtener el momento centrado de orden cuatro es necesario disponer de los momentos absolutos de orden uno, dos, tres y cuatro. Nosotros ya disponemos de los tres primeros, por lo que nos abocaremos a continuación a obtener el cuarto.

Considerando distribuciones continuas, el momento absoluto de orden cuatro se calcula de la siguiente forma: $m_4 = \int_a^b x^4 f_{(x)} dx$.

Reiteramos, a riesgo de ser redundantes, que para alcanzar el valor del momento absoluto de orden cuatro deberemos sumar los momentos absolutos de igual orden para cada una de las funciones de las que disponemos, es decir, aquella con dominio $[Q_p,Q_m]$ y la que posee dominio $[Q_m,Q_o]$.

$$m_4 1 = \int_{Q_p}^{Q_m} \left[\frac{-2Q_p}{(Q_o - Q_p)(Q_m - Q_p)} x^4 + \frac{2}{(Q_o - Q_p)(Q_m - Q_p)} x^5 \right] dx =$$

$$= \left[\frac{-2Q_p}{(Q_o - Q_p)(Q_m - Q_p)} \frac{x^5}{5} + \frac{2}{(Q_o - Q_p)(Q_m - Q_p)} \frac{x^6}{6} \right]_{Q_p}^{Q_m} =$$

$$= \frac{2Q_p^6 - 12Q_p Q_m^5 + 10Q_m^6}{30(Q_o - Q_p)(Q_m - Q_p)}$$

Por su parte,

$$m_4 2 = \int_{Q_m}^{Q_o} \left[\frac{2Q_o}{(Q_o - Q_p)(Q_o - Q_m)} x^4 - \frac{2}{(Q_o - Q_p)(Q_o - Q_m)} x^5 \right] dx =$$

$$= \left[\frac{2Q_o}{(Q_o - Q_p)(Q_o - Q_m)} \frac{x^5}{5} - \frac{2}{(Q_o - Q_p)(Q_o - Q_m)} \frac{x^6}{6} \right]_{Q_m}^{Q_o} =$$

$$= \frac{2Q_o^6 - 12Q_o Q_m^5 + 10Q_m^6}{30(Q_o - Q_p)(Q_o - Q_m)}$$

Por lo tanto, será:

$$m_4 = m_4 1 + m_4 2 = \frac{Q_p^6 - 6Q_p Q_m^5 + 5Q_m^6}{15(Q_o - Q_p)(Q_m - Q_p)} + \frac{Q_o^6 - 6Q_o Q_m^5 + 5Q_m^6}{15(Q_o - Q_p)(Q_o - Q_m)} =$$

$$m_4 = \frac{Q_p^6(Q_o - Q_m) - Q_m^6(Q_o - Q_p) + Q_o^6(Q_m - Q_p)}{15(Q_o - Q_m)(Q_o - Q_p)(Q_m - Q_p)}$$

Ahora que ya poseemos las ecuaciones de los momentos absolutos de orden uno, dos, tres y cuatro, podemos calcular el numerador de la medida de curtosis, mediante la fórmula presentada al comienzo del parágrafo sobre curtosis.

El denominador no será más que el cuadrado de la variancia, ya obtenida.

Citas bibliográficas

[1] Citado por Kosko, Bart; *Pensamiento Borroso*; Editorial Crítica; 1995; página 17.

[2] Kauffmann, A. y Gil Aluja, J.; *Técnicas operativas de gestión para el tratamiento de la incertidumbre*; Editorial Hispanoeuropea; Barcelona; 1987; páginas 19 y 20.