

**XXI Encuentro Nacional de Docentes de Producción**

**Administración de inventarios  
en condiciones de incertidumbre**

Grupo de Investigación Matemática Borrosa

Dr. Paulino Eugenio Mallo (Director)

Cont. María Antonia Artola

Cont. Lic. Mariano Morettini

Cont. Lic. Marcelo Javier Galante

Cont. Lic. Mariano Enrique Pascual

Sr. Adrián Raúl Busetto

**Facultad de Ciencias Económicas y Sociales**

**Universidad Nacional de Mar del Plata**

**Octubre de 2004**

## INDICE

INTRODUCCIÓN A LA MATEMÁTICA BORROSA.....	03
TRATAMIENTO DETERMINÍSTICO DEL TEMA.....	05
INTRODUCCIÓN DE LAS TÉCNICAS BORROSAS.....	08
MODELO DE LOTE OPTIMO BASADO EN UN ALGORITMO GENETICO....	09
EJEMPLO PRACTICO.....	10
CONCLUSIONES.....	12
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	13

## I. INTRODUCCIÓN

La Matemática Borrosa surge como consecuencia del desarrollo de la lógica difusa, la cual plantea una alternativa al principio aristotélico del tercero excluido, pilar de la Matemática tradicional. Dicho principio suele plantearse como el “A o no A”, esto es, un elemento pertenece o no pertenece a un conjunto determinado, excluyendo una tercera alternativa.

Las situaciones con las que tenemos que enfrentarnos a diario no siempre son de natural adaptación a la lógica bivalente del tercero excluido y, por lo tanto, de dudoso tratamiento correcto mediante la Matemática tradicional.

Para ejemplificar la afirmación anterior supongamos que se quiere categorizar a las personas en altas o bajas. Indudablemente, no tendremos problemas en indicar la pertenencia de una persona de 2,30 metros de altura al grupo de personas altas, como tampoco lo tendremos si nos encontramos con un individuo de talla 1,20 metros, asignándole el conjunto de las personas bajas. Pero la determinación de pertenencia a uno u otro conjunto se hará más difícil si la persona en cuestión midiera 1,75 metros.

La lógica difusa permite establecer algún grado de pertenencia de cada elemento a un conjunto, de manera que, en el ejemplo anterior, todas las personas perteneceríamos al conjunto de los individuos altos, pero en grados distintos. Así, la persona de 1,75 metros de altura pertenecerá al conjunto en cuestión en mayor grado que la de 1,20 metros.

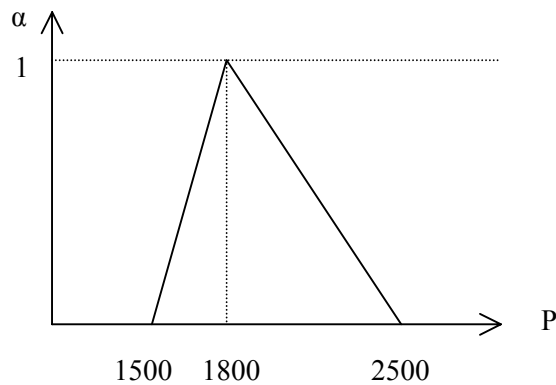
Abordando ahora la Matemática Borrosa numérica, al fijar el valor de una variable influenciada por la incertidumbre, no podremos dar un número preciso, sino que resulta más sincero presentar un rango de valores dentro de los cuales seguramente se ubicará la variable en cuestión asignando una mayor confianza, a lo sumo, a algunos valores pertenecientes a dicho rango.

Así, la forma más simple de introducir borrosidad en el análisis es mediante la utilización de intervalos de confianza, que poseen dos valores característicos, uno inferior y otro superior. De esta manera, si la cantidad de productos demandada para el mes próximo en una empresa es la variable con la cual debemos trabajar, como no podemos dar un número preciso porque el comportamiento de la misma está signado por la incertidumbre, podremos decir: “estará entre 1500 y 2500 unidades”, conformando éste un intervalo de confianza.

Avanzando un poco más podemos determinar valores dentro del intervalo a los cuales les asignamos mayor confianza. Nacen así los números borrosos triangulares (NBTs). Estos números poseen tres cifras características: una inferior, otra superior y una tercera a la cual le asignamos la mayor confianza. En números será, por ejemplo:

$$\tilde{P} = [1500;1800;2500]$$

y gráficamente:

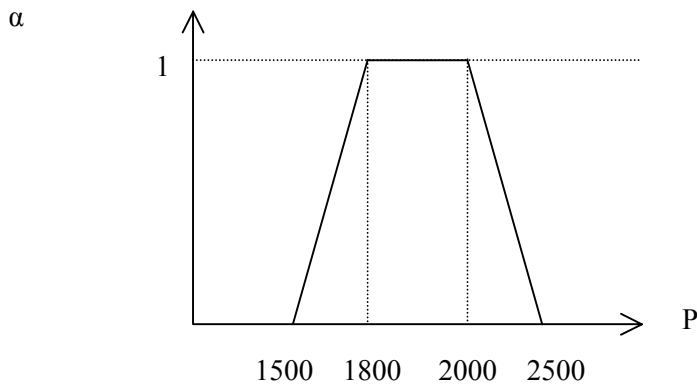


El signo  $\sim$  indica que se trata de un número borroso, y puede mostrarse tanto arriba como debajo del nombre del número. La letra griega  $\alpha$  representa al nivel de confianza (o grado de pertenencia) de cada cifra del intervalo del NBT. En este caso, el valor inferior y el superior del NBT determinan el “conjunto”, los infinitos números reales contenidos en dicho intervalo son los “elementos” del conjunto, y la altura en el gráfico (el nivel de  $\alpha$ ) indica el grado de pertenencia de cada número a ese conjunto.

Pero podría ser que incluso para la máxima confianza no pueda determinarse un único valor, sino un intervalo. En ese caso nos encontramos frente a números borrosos trapezoidales (NBTr), y se representan así:

Numéricamente:  $\tilde{P} = [1500;1800;2000;2500]$

Y gráficamente:



Estas tres formas son con las que más se trabaja, por comodidad –sobre todo con los NBTs-, pero existen muchas otras. La más completa en cuanto a la incertidumbre que contempla es la que asigna a cada valor dentro del rango del intervalo considerado una confianza o grado de pertenencia propio, es decir, el comportamiento de  $\alpha$  entre los valores característicos no es lineal.

Por último, cabe destacar que la construcción de estos números debe hacerse previa consulta a expertos en la materia, a partir de cuyas consideraciones se determinarán los intervalos dentro de los cuales se ubicará cada una de las variables.

## II. TRATAMIENTO DETERMINÍSTICO DEL TEMA

La gestión de inventarios constituye una tarea esencial del comportamiento económico de las empresas. Con ella, se pretende satisfacer las necesidades de los clientes o del proceso productivo incurriendo en los mínimos costos posibles.

El diseño tradicional del problema se restringe a una serie de supuestos simplistas, que no suelen cumplirse en la práctica. Con este trabajo se pretende dar un enfoque más realista al problema de la gestión de stock por parte de las empresas.

Los inventarios son materia prima, productos en proceso y/o productos terminados (y en condiciones de ser vendidos) que una empresa posee, ya sea para su venta o para abastecer al proceso productivo. Los inventarios suelen constituir una parte importante del activo de las empresas.

El mantenimiento de un volumen importante de unidades en inventario presenta las siguientes ventajas:

- Maximizar el servicio a los clientes. Es decir que los productos estén disponibles cuando son demandados.
- Los inventarios permiten equilibrar la producción y, además, la construcción de inventarios anticipados para la venta en periodos de gran demanda. Es decir a través de la acumulación y desacumulación de stock, se logra afrontar la demanda estacional, actuando los inventarios como un colchón, que permite mantener nivelada la producción. De esta manera se evitan los costos de cambios en los niveles de producción.
- Los inventarios permiten fabricar en grandes lotes de producción, lo cual ocasiona menores costos de puesta a punto.
- Los inventarios permiten comprar en grandes cantidades, las cuales propician, tanto unos menores costos de emisión de pedido por unidad, como la concesión de descuentos por volumen.

No obstante, la consecución de las ventajas enumeradas anteriormente exige un sacrificio económico. El problema reside en equilibrar las inversiones en existencia con:

- Servicio al cliente. Cuanto mayor sea el volumen de inventario mayor será el servicio al cliente, pues no tendrá nunca que esperar, ni se encontrará con la insatisfacción de no ser atendido.
- Costos asociados al cambio en el nivel de producción. Si la producción fluctúa con la demanda, tratando de buscarse la minimización de los stocks, se producen sobreutilización de los equipos (en los periodos de gran demanda), y subutilización (en los de baja demanda).

- Costos de emisión de pedidos. Los pequeños niveles de inventarios pueden ser manejados con un menor esfuerzo, pero esto implica un aumento elevado de los costos de pedido. Estos costos son fijos por pedido, y a mayor cantidad de pedidos, mayores serán.
- Costos de transporte. El traslado de productos en pequeñas cantidades tiene un costo por unidad mayor que en grandes volúmenes. Sin embargo, los grandes volúmenes implican grandes inventarios.

La clave del problema radica en conseguir que los beneficios de mantener inventario excedan los costos que hay que soportar.

En resumen, para la toma de decisiones relacionadas con la gestión de inventarios se han considerado los siguientes costos:

**Costo de compra.** El precio pagado por la adquisición de un artículo comprado, que se compone del costo del material, más todos los costos directos en los que haya sido necesario incurrir para conseguir que dicho material se encuentre en la empresa.

**Costo de mantenimiento en almacén.** Estos costos se refieren a los gastos en los que incurre la empresa y que son proporcionales al volumen de inventarios que se mantiene. A medida que aumentan los inventarios, también lo hacen los costos de este tipo.

**Costos de emisión de una orden.** El costo de emitir un pedido no depende únicamente de la cantidad solicitada, sino que hay ciertos costos que son independientes de dicha cantidad. Su importe puede reducirse realizando pedidos en grandes cantidades, con lo que el número de órdenes será menor. Sin embargo, esto producirá que el nivel de inventario sea mayor y, a su vez, el costo de mantenimiento de los artículos en almacén también.

**Costos de ruptura.** Esto se da cuando la demanda excede los volúmenes presupuestados. Esta ruptura en el stock ocasiona: costos de ventas no realizadas, de devolución del pedido, de pérdidas de clientes, etc. Las rupturas pueden evitarse manteniendo niveles extras de inventarios. Sin embargo esta práctica implica mayores costos de mantenimiento de artículos.

**Costos de Capacidad.** Cuando los volúmenes de demanda fluctúan por motivos estacionales, se incurre en costos de alquiler, entrenamiento, horas extras, paradas, etc., fuera de lo previsto. Este tipo de costos se puede evitar nivelando la producción con el fin de obtener productos en épocas de demanda baja para ser vendidos en períodos de aumento de la misma lo que, por otro lado produce un incremento en los costos de mantenimiento.

Como expresáramos anteriormente, los objetivos de la gestión de inventarios son suministrar el nivel de servicio requerido a los clientes y reducir la suma de todos los costos implicados. Para conseguir ambos objetivos, se ha de responder a dos cuestiones básicas: ¿Cuánto se debe pedir cada vez? y ¿Cuándo se debe emitir una orden?

En este sentido, el modelo de Lote Óptimo es una representación matemática de los costos involucrados en la gestión de stocks que, a pesar de su simplicidad, ha proporcionado soluciones razonables a una gran cantidad de problemas prácticos.

Este modelo se fundamenta en cinco supuestos de carácter restrictivo:

- 1) La demanda es constante y conocida
- 2) El tiempo de entrega es nulo, es decir no existe retraso entre realizar el pedido y la recepción.
- 3) Los artículos se producen o compran por lotes y no continuamente.
- 4) Los costos de emitir un pedido y los costos de mantenimiento de los artículos en el almacén son conocidos y constantes en el tiempo.
- 5) Los artículos llegan todos a la vez.
- 6) El modelo (al menos en su formulación original), supone que sólo hay dos tipos de costos: el de emitir una orden y el de mantener los materiales en almacén.

Estas hipótesis son validas cuando se trata de productos terminados cuya demanda es independiente y bastante uniforme. Sin embargo, hay múltiples situaciones en las cuales no se cumplen las suposiciones del modelo.

En los casos en los que se ajusta, los costos de emitir una orden aparecerán cada vez que se realiza un pedido a los proveedores e incluirán, generalmente, trabajos administrativos, llamadas telefónicas, envíos postales, viajes, etc., o una combinación de las anteriores. Por otro lado, los costos de mantenimiento de los materiales en el almacén estarán compuestos por costos de operarios encargados del manejo de los materiales, seguros, impuestos, depreciaciones, obsolescencia, etc.

De esta forma, y a los efectos de la representación matemática del modelo, si se denomina  $Q$  a la cantidad que se pide en cada ocasión,  $D$  la demanda anual constante, y  $C_o$  el costo de realizar cada pedido, entonces el costo total de emisión de cada pedido será :

$$\text{Costo de emision} = C_o \frac{D}{Q} ;$$

y para un costo unitario de mantenimiento en almacén ,  $C_{um}$  , el costo anual de mantenimiento seria:

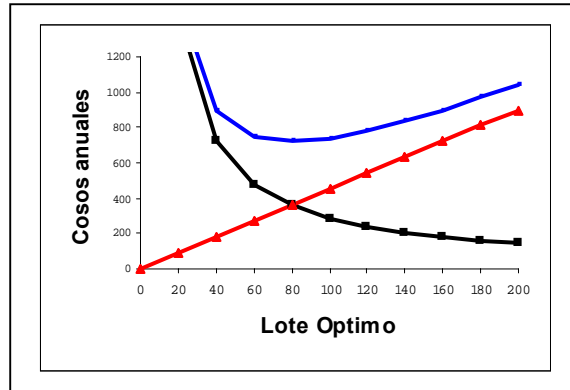
$$\text{Costo de mantenimiento} = C_{um} \frac{Q}{2} ;$$

ya que al ser los pedidos iguales y la demanda constante, la cantidad almacenada por término medio será  $Q/2$ .

El costo total anual de la gestión de stock vendrá determinado por la siguiente expresión:

$$\text{Costo anual stock} = C_{um} \frac{Q}{2} + C_o \frac{D}{Q};$$

y su representación grafica en función de la cantidad pedida sería:



Si se pretende calcular la cantidad a pedir que minimice el costo total del stock de acuerdo con las hipótesis de partida, se deriva la ecuación de costos totales con respecto a la cantidad Q para obtener el punto óptimo de la función. De esta manera se obtiene la expresión para calcular la cantidad óptima a pedir en condiciones de certeza.

$$Q = \sqrt{\frac{2 C_o D}{C_{um}}}$$

### III. INTRODUCCIÓN DE LAS TÉCNICAS BORROSAS

El planteamiento del modelo tradicional es muy restrictivo y no se ajusta a la realidad del mundo empresarial actual. Por ello, las críticas que se le pueden realizar al mismo se corresponden con algunas de las suposiciones sobre las que se basa:

- ✓ La demanda no siempre es conocida con certeza, aunque se puede disponer de información imprecisa sobre el comportamiento de la misma. Por ello, se lograría una mejor representación de la demanda gracias a la utilización de números borrosos.
- ✓ Los costos de pedido y de mantenimiento no siempre son conocidos y constantes en el tiempo. Al igual que sucede con la demanda, hay que estimar su comportamiento futuro. Asimismo, su comportamiento no tiene porqué ser lineal ni continuo, por lo que la función de costos no tiene necesariamente que ser derivable.
- ✓ Pueden surgir costos diferentes y mayores a los de emisión de pedidos y mantenimiento de stocks. En la realidad la empresa incurre en muchos más costos



tales como los de ruptura de stock, depreciación de los materiales, etc. Que complican el análisis mediante el modelo tradicional.

Teniendo en cuenta las críticas expuestas, en este trabajo se pretende formular un planteamiento del problema del cálculo de la cantidad económica más amplio que el modelo tradicional, de forma que el mismo sea operativo en condiciones de incertidumbre y no-linealidad. La demanda no tiene por que ser conocida de forma precisa, por lo que puede ser viable presentarla como un número borroso trapezoidal  $\tilde{D} = [D_1; D_2; D_3; D_4]$ . De este modo, se consigue englobar no solo aquellas situaciones en que se conoce con certeza su comportamiento, sino también otras, en que se puede estimar ciertos valores dentro de los cuales se encontrará. De igual manera, todas las demás variables intervinientes en el modelo (Costos de adquisición de los artículos, de mantenimiento, de emisión de la orden, de depreciación, tamaño de pedido) pueden ser mejor representados a través de números borrosos trapezoidales. Ninguno de estos costos, en la realidad, muestran un comportamiento predecible.

Con este planteamiento, se pretende dar una visión más global del problema y, de este modo, abarcar situaciones cotidianas de las empresas. Sin embargo, se sigue manteniendo una hipótesis del modelo tradicional: la distribución uniforme de la demanda en el periodo de estudio, aunque tenga un valor impreciso. Por otro lado, el enfoque que se sugiere no permite su resolución de una forma sencilla, pues la función de costos totales resulta muy compleja. Así, con el fin de encontrar una cantidad a pedir que minimice los costos incurridos se sugiere emplear un modelo basado en la naturaleza. De esta forma, con su aplicación, aunque la solución alcanzada puede no ser la óptima, se encontrará muy próxima a la misma.

#### **IV. MODELO DE LOTE ÓPTIMO BASADO EN UN ALGORITMO GENETICO**

El modelo de lote óptimo descrito en los párrafos anteriores tradicionalmente ha sido resuelto con métodos de optimización lineal, los cuales dejan de ser sinceros si se pretende tener en consideración el posible comportamiento de los distintos tipos de costos intervinientes.

Por ello, en este apartado se plantea un modelo basado en un algoritmo genético para resolver el problema de la provisión de las cantidades a pedir en un período de análisis, que permita superar las principales restricciones de la metodología tradicional. Este algoritmo genético esta inspirado en la manera en que actúa una colonia de hormigas en la naturaleza.

El funcionamiento básico de una colonia de hormigas (CH) es el siguiente: en cada iteración, una población de H hormigas construye progresivamente, según una regla de transición de estados que depende de la información existente, distintos recorridos por el mapa total. Una vez evaluadas éstas, los recorridos asociados a las soluciones más prometedoras son

reforzados por un aporte adicional de feromona<sup>1</sup>, mientras que los demás recorridos alternativos se van evaporando.

Adicionalmente, cabe poner de manifiesto que el desarrollo del Sistema de Hormigas implementado utiliza información expresada mediante números borrosos trapezoidales.

Para la resolución del problema objeto de estudio se han de determinar en primer lugar las distintas opciones de recorridos que cada agente puede realizar a fin de proporcionales una solución factible. Para ello, se han de considerar los límites que tienen la empresa para realizar los pedidos, los cuales suelen estar determinados por el tamaño de pedido mínimo que ofrece el proveedor, por la capacidad del almacén, por los precios ofertados para los distintos volúmenes, etc. La influencia de tales variables en la función representativa del costo total ocasiona que dicha función no sea lineal, debiendo tener en consideración a la hora de analizar el costo del inventario, cada uno de los tramos originados por la influencia de dichas variables. La adecuación de cada alternativa se puede obtener calculando el costo total de inventario que representa dicha solución, el cual vendrá determinado por la suma de los costos de compra, mantenimiento, emisión de pedidos, de ruptura y de capacidad.

De acuerdo con los pasos anteriores se habría obtenido una nueva población del Algoritmo Genético, repitiéndose el proceso tantas veces como se desee. Sin embargo, con objeto de evitar posibles pérdidas de cadenas de alta adecuación se incluye la característica denominada Elitismo, cuya función es mantener la mejor solución de una población en las siguientes hasta que otra no lo supere en adecuación al problema.

## **V. EJEMPLO PRÁCTICO**

Para contrastar el funcionamiento del modelo a continuación se desarrolla un ejemplo práctico:

Supóngase una fábrica de muebles que adquiere diversos tipos de maderas para la elaboración de sus productos terminados, de forma que para una de ellas se destina un almacén que puede contener 6.000 tn de la misma.

De acuerdo con las previsiones realizadas, la demanda de muebles de este tipo de madera para el periodo de análisis permite calcular las cantidades que precisará el proceso productivo para satisfacerla, y que vienen determinadas por el número borroso trapezoidal: (5000, 5250, 5500, 5700).

El proveedor que suministra este tipo de madera no facilita pedidos inferiores a 500 tn., siendo la estimación de la política de precios de venta (de acuerdo a los volúmenes de pedido), según se muestra en la tabla adjunta.

---

<sup>1</sup> Sustancia que segregan las hormigas, cuando encuentran alimento, para marcar el camino que recorren

Tamaño de pedido	Precio de Compra
500 – 1000 Tn.	25 \$/Tn.
1001 – 2000 Tn.	24 \$/Tn.
2001 – 3000 Tn.	23 \$/Tn.
3001 – 4000 Tn.	22 \$/Tn.
4001 – 5000 Tn.	21 \$/Tn.
5001 – 6000 Tn.	20 \$/Tn.

El costo de realizar un pedido se comporta de forma proporcional, de manera que cada vez que se realiza un pedido se incurre en un costo estimado de transporte de (7500, 7600, 7650, 7750). Por su parte el costo de mantenimiento se comporta de manera semifija, ya que se trata de los empleados encargados del manejo de la mercadería. Los parámetros que lo determinan se muestran a continuación:

Parámetros	Valores
Costo de 1 empleado	(50.000, 51.000, 51.000, 52.500)
Costo de 2 empleados	(98.000, 100.000, 100.000, 105.000)
Costo de 3 empleados	(145.000, 148.000, 150.000, 155.000)
Capacidad de 1 empleado	2.500
Capacidad de 2 empleados	5.000

Finalmente, la depreciación que sufre una tonelada de producto almacenado por mes se estima en (0.05; 0.10 ; 0.15; 0.20), calculado sobre el stock medio.

De acuerdo con la información anterior, se desea conocer cual será la cantidad que debe pedir al proveedor para que sus costos sean los mínimos durante el periodo de análisis.

Una solución generada en forma aleatoria mediante el modelo podría ser pedir 1.200 Tn. cada vez que se termine el inventario almacenado. El costo de adquisición de la demanda realizando pedidos de este tamaño sería:

$$\tilde{C}_a = [24.5000; 24.5250; 24.5500; 24.5700]$$

$$\tilde{C}_a = [120000; 126000; 132000; 136800]$$

Por su parte, para el mantenimiento de las mercancías en el almacén solo haría falta un operario, pues el stock medio almacenado es de 600 Tn., con lo cual, el costo de mantenimiento será:

$$\tilde{C}_m = [50000; 51000; 51000; 52000]$$

El costo de emisión de pedido es proporcional al número de pedidos que se realizan para satisfacer la demanda, por ello, en este caso será:

$$\tilde{C}_o = \left[ 7500 \cdot \frac{5000}{1200}; 7600 \cdot \frac{5250}{1200}; 7650 \cdot \frac{5500}{1200}; 7700 \cdot \frac{5700}{1200} \right]$$

$$\tilde{C}_o = [31250; 33250; 35662; 36812]$$

Finalmente, el costo de depreciación para un stock medio de 600 tn., será:

$$\tilde{C}_d = [600.12.0,05; 600.12.0,10; 600.12.0,15; 600.12.0,20]$$

$$\tilde{C}_d = [360; 720; 1080; 1440]$$

Con la adición de todos los costos anteriores, se tendrá el costo total del inventario si se realizan pedidos de 1200 Tn. cada vez.

$$\tilde{C.T.} = [201610; 210970; 219742; 227052]$$

A partir de esta primera solución generada en forma aleatoria, el modelo desarrollado empieza a generar distintos valores de parámetros iniciales, tratando de acercarse al valor óptimo de pedido a través de iteraciones. El modelo es posible que no alcance un resultado óptimo, similar al que se lograría a través del planteamiento tradicional (que actúa en forma determinística), pero funciona de manera más realista. Se omitió la forma en que interacciona internamente el algoritmo, de manera tal de simplificar la presentación del ejemplo.

## VI. CONCLUSIONES

Este trabajo ha presentado la determinación del lote óptimo de compra a través de un algoritmo inspirado en el funcionamiento de la naturaleza, actuando bajo un ambiente de incertidumbre. Para el tratamiento de la misma, se trabajó con herramientas suministradas por la matemática borrosa.

El resultado que arroja el modelo, si bien es mucho más incierto que el proporcionado por el método tradicional de lote óptimo, creemos que resulta mucho más sincero y realista.

Teniendo en cuenta que las variables que determinan el resultado del modelo están cargadas de incertidumbre, consideramos que es mucho más racional un resultado incierto.

## VII. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[Casparri, M.T. – García Fronti, J. – Zorzoli, G.F.J.; 2001] “Aplicación de la simulación en la resolución de un modelo de inventario con demanda híbrida”; Anales del VIII Congreso de la Sociedad Internacional de Gestión y Economía Fuzzy; Nápoles, Italia.

[Kaufmann, A. – Gil Aluja, J.; 1987] *Técnicas operativas de gestión para el tratamiento de la incertidumbre*; Editorial Hispano Europea; Madrid.

[Mallo, P.E. y Ots.; 1998] *Matemática Borrosa*; Informe final del proyecto de investigación “Aplicaciones de la Matemática Borrosa a las disciplinas Contables y Administrativas” del Centro de Investigaciones Contables de la Facultad de Ciencias Económicas y Sociales de la Universidad Nacional de Mar del Plata.

[Mendaña Cuervo, C. – Lopez González, E.; 2002] “Un sistema de hormigas borroso para la determinación de la cantidad óptima de pedido: el modelo COP-SHB (versión preliminar)”; Mérida, Venezuela.

[Narro Ramírez, A.E.; 1999] “Modelo difuso de un sistema de inventario multietapa”; Anales del VI Congreso de la Sociedad Internacional de Gestión y Economía Fuzzy; Moreli, México.

[Narro Ramírez, A.E. – Correa Serrano, M.A. – Sánchez Guevara, I.; 2000] “Modelo difuso de inventarios para emergencias. Caso Xochimilco, México”; Anales del VII Congreso de la Sociedad Internacional de Gestión y Economía Fuzzy; Creta, Grecia.