

“UNA APLICACIÓN DE LA MATEMÁTICA FINANCIERA: VALUACIÓN DE OPCIONES REALES CON FLEXIBILIDAD E INCERTIDUMBRE”

Autores: Dr. Paulino Eugenio Mallo
Cont. María Antonia Artola
Cont. Mariano Morettini
Cont. Marcelo Galante
Cont. Mariano Pascual
Cont. Adrián Busetto
Lic. Alicia Zanfrillo

RESUMEN

Con la finalidad de aportar herramientas a los docentes de nuestra asignatura que les permita transmitir a los alumnos su importancia, al considerársela como matemática aplicada en otras ramas del conocimiento, presentamos este tema contable relacionado con la valuación de opciones reales.

Esta temática se presenta como uno de los campos más propicios para la investigación dada la continua necesidad de obtener mejores métodos de valuación de activos, principalmente, cuando no existe una cotización del mismo en el mercado.

Para comprenderlo debemos tener presente algunos conceptos, por ejemplo la *flexibilidad*, que implica establecer el momento apropiado para tomar la decisión de cambio del rumbo, simplemente porque se ha detectado una *opción* de mejora.

Si además incorporamos el contexto donde se desempeña toda organización, con sus características de cambiante e incierto, aplicaremos a la flexibilidad las herramientas que aporta la Matemática Borrosa con la finalidad de mejorar los resultados del método de cálculo, el que contendrá a la incertidumbre.

Para poder cumplir con el objetivo propuesto: *metodizar el cálculo de valuación de opciones reales en incertidumbre*, presentaremos una metodología que consistirá en:

- Determinar el valor presente del proyecto sin flexibilidad.
- Su representación gráfica utilizando la técnica de árboles.
- Sustentar lo dicho anteriormente en dos métodos de valuación denominados: de replicación de portafolios y de neutralidad al riesgo.
- Completar los modelos enunciados con la incorporación de borrosidad, reconociendo la necesidad de tomar decisiones sobre eventos futuros cargados de incertidumbre, eliminando el subjetivismo y sincerando la información.

PALABRAS CLAVES:

MATEMÁTICA FINANCIERA – FLEXIBILIDAD – INCERTIDUMBRE –
VALUACION – OPCIONES REALES – BORROSIDAD

INTRODUCCION

La primera cuestión es diferenciar opciones “financieras” de “reales” conceptualmente. Mientras que las primeras responden a “*un contrato que le da al tenedor o comprador el derecho, mas no la obligación, de comprar o vender alguna acción o valor en una fecha predeterminada (o antes) y a un precio preestablecido*”¹, las segundas representan aquellas *opciones de la firma que se vinculan con algún activo tangible y que están presentes en cualquier proyecto de inversión cuando existe alguna posibilidad futura de actuación al conocerse la resolución de alguna incertidumbre actual*².

Ambas opciones representan un derecho, pero no una obligación, de realizar una acción y sus principales diferencias pueden resumirse de la siguiente manera:

- en las opciones reales el activo subyacente es un activo tangible, en cambio en las financieras está representado por un valor mobiliario;
- en las opciones reales el activo subyacente generalmente no es negociable, como consecuencia no se puede obtener la varianza de los retornos;
- las opciones financiera son secundarias a la empresa que constituye el activo subyacente;
- en las opciones reales la gerencia controla el activo subyacente, en general aumentar su valor induce a mejorar el valor de opción;
- ejercer una opción real incrementa la incertidumbre a la que se enfrenta la empresa, porque puede provocar la reacción de la competencia.

Abogados en el presente trabajo al análisis de las opciones reales, debemos recordar que “*el análisis de las decisiones de presupuesto de capital es importante para reconocer que los proyectos que usted acepte hoy pueden afectar a sus futuras oportunidades de inversión*”³, y lo importante es reconocer esas oportunidades futuras que seguramente implicarán una opción.

Este tema no debería estar ajeno a cualquier gestión financiera, porque la mayoría de los proyectos de inversión llevan implícita algún tipo de opción, por ejemplo: la expansión futura de la compañía versus el abandono del proyecto como consecuencia del comportamiento del mercado donde la empresa se desenvuelve, correspondiendo en el primer caso decidir medidas que acentúen sobre el beneficio o sobre la protección para la opción.

El concepto de “flexibilidad” se relaciona con el *VAN* de un proyecto, ya que cuando simplemente se descuenta un flujo de fondos mediante la utilización de una tasa que represente el mismo rendimiento que otro activo comparable en riesgo, no se tiene en cuenta la “flexibilidad” que tiene el decididor para cambiar el rumbo originalmente elegido, y si éste puede modificar o mejorar la situación, esa decisión debe tener un valor que el *VAN* por sí solo no lo refleja.

El análisis de proyectos busca tener presente toda esta temática de las opciones, pero no siempre cumple con este objetivo. A tal fin se entiende por “flexibilidad” a la

¹ Definición obtenida del libro “Futuros y opciones financieras. Una introducción”, de Tinoco y Hernández Trillo. Noriega Ediciones, 2000, página 79 del capítulo 8.

² Conceptos extraídos, sin ser textuales, del libro “Cálculo Financiero Aplicado” de López Dumrauf. Editorial La Ley SAEI, 2003, página 373 del capítulo XIV.

³ Extraído del texto “Principios de Dirección Financiera”, de Brealey, Myers y Marcus. Ediciones McGraw-Hill, 1999, página 704.

herramienta mediante la cual un proyecto que fuera analizado y aceptado⁴, se lo siga estudiando con la finalidad de mitigar los efectos de sorpresas no deseadas y potenciar las deseadas y se plasma en los “árboles de decisión”, que implica optar por:

- ✓ abandonar el proyecto si las cosas van mal, cuando el mercado es desfavorable;
- ✓ expandir la empresa, si las cosas van bien en un mercado favorable.

En este momento nos parece útil introducir el concepto de “árbol de decisión”, indicando que se trata de un tipo particular de grafo o red, que explica el comportamiento de un conjunto de elementos relacionados, estando representados los elementos a través de nodos o vértices y las relaciones por arcos o flechas. El mismo se ha constituido en el campo de las disciplinas contables y administrativas como una importante herramienta para la toma de decisiones⁵ en general y -en particular- en inversiones secuenciales, además de permitir la representación simplificada de elementos y relaciones de cualquier proceso económico.

Por otra parte las opciones siempre están incluidas en las decisiones financieras, por ejemplo: la emisión de bonos con opción al cambio por acciones ordinarias, como medida de protección de la empresa por riesgos en tasas, divisas, bienes.

En este aspecto se ha desarrollado una gran cantidad de bibliografía referida a los problemas que las opciones plantean, que implica metodizar los cálculos de determinación de los precios de éstas para lograr la equidad de las partes en diferentes ambientes y circunstancias, principalmente enfocado hacia la comercialización de acciones. Pero el tema no se encuentra acotado a este bien y es importante reconocer que una opción puede ser sobre: activos reales o activos financieros.

Para introducirnos en la temática propiamente dicha clasificaremos a las opciones reales en:

- de expansión, que representa la incorporación en un proyecto de inversión, la opción de comprar un bien adicional;
- de abandono, cuando un determinado bien sólo será necesario después de ver el comportamiento del mercado. Entonces si las condiciones no son favorables se puede abandonar el proyecto a un costo inferior.

Si a toda esta revisión agregamos un último concepto -que utilizaremos en nuestro desarrollo- y que es ampliamente conocido, como es el caso del denominado *VAN* que ya hemos sintetizado en párrafos anteriores, estamos en condiciones de desarrollar nuestra propuesta, que analizaremos desde el punto de vista de la incorporación de la incertidumbre y su tratamiento matemático.

CÁLCULO DEL VALOR PRESENTE SIN FLEXIBILIDAD

Nuestro punto de partida será la determinación del *VAN* de un proyecto sin flexibilidad, concretamente se trata de un proyecto que implica la compra de un activo

⁴ Por diferentes técnicas: ya sea por sensibilidad (modificaciones de una variable en un momento determinado), por escenarios (contemplación de diferentes condiciones de mercados alternativos), o incluso por punto de equilibrio (que conlleva al denominado efecto de apalancamiento operativo).

⁵ Tema que fuera tratado en el trabajo titulado “Teoría de las Decisiones en Situación de Incertidumbre”, perteneciente al Grupo de Investigación de Matemática Borrosa (GIMB) y que fuera publicado en los Anales del X Congreso Internacional de la Sociedad de Gestión y Economía Fuzzy, desarrollado en León, España, en octubre de 2003, disponible en CD.

“tangible” que puede tener varias opciones de acción futuras (expandirlo, abandonarlo, sostenerlo, etc.).

Para entender la propuesta introduciremos un sencillo caso de aplicación, que consiste en comprar una máquina que aumentará nuestra producción provocando en el primer año un ingreso adicional de \$ 15.300 si la absorción del mercado del excedente productivo es favorable y de \$ 5.100, si la respuesta de la demanda es desfavorable. Asimismo, sabemos que un estudio previo del mercado produjo como conclusión que ambas situaciones futuras tienen igual probabilidad de ocurrencia. El costo de la inversión es de \$ 10.200, pero puede diferirse el desembolso hasta dentro de un año, donde la empresa contará con mayor información y su decisión puede ser diferente a la de hoy.

El primer paso es determinar una tasa de descuento -sin entrar en el tratamiento del tema propiamente dicho, adoptaremos uno de los métodos existentes-, consistente en buscar un activo gemelo⁶ conocido en el mercado con el mismo grado de riesgo. Del mismo, por ejemplo, se conoce su precio actual de \$ 1.540, con un flujo de \$ 2.772 para la mejor situación y \$ 924 en la peor, por lo tanto tiene un rendimiento implícito de:

$$1540 = \frac{2772 * 0.50 + 924 * 0.50}{1 + i} \Rightarrow i = 0.20$$

De acuerdo con los datos propuestos, el valor presente del proyecto a utilizar para valorar la opción de diferimiento será:

$$VP = \frac{15300 * 0.50 + 5100 * 0.50}{1.20} = 8500$$

Considerando la opción de desembolsar el valor de la inversión al año, descontamos la misma a una tasa libre de riesgo, por ejemplo del 4%, obteniendo su valor presente de la siguiente manera: $10200 * 1.04^{-1} = 9807.69$.

En este caso el VAN sería: $8500 - 9807.69 = -1307.69$, por el cual se rechazaría el proyecto sin haber considerado la flexibilidad de la opción.

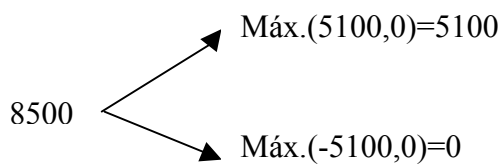
REPRESENTACIÓN DE LA DECISIÓN MEDIANTE UN ÁRBOL

Trataremos ahora reflejar este cálculo a través de un árbol de decisión, sabiendo que el decididor tiene dos opciones, abonar la inversión inicial en el momento cero o hacerlo al año. Esta situación puede resumirse en el siguiente cuadro:

	Flujo de fondos	Resultado	Elección
Mercado favorable	15300	5100	Máx.(5100,0)
Mercado desfavorable	5100	-5100	Máx.(-5100,0)

Es decir:

⁶ Significa que deben tener la misma sensibilidad en los cambios de rendimiento del bien, con relación a los cambios de rendimiento del mercado en su conjunto, la que se determina mediante un coeficiente denominado comúnmente beta, β .



Con lo cual obtenemos:
$$VAN = \frac{5100 * 0.50 + 0 * 0.50}{1.20} = 2125$$

Puede observarse que la diferencia considerando la flexibilidad es considerable. ¿Cuál es el mayor problema?, evidentemente la tasa de descuento, como consecuencia de que los flujos de fondos proporcionados por la opción de diferir no se encuentran correlacionados con los flujos de fondos del proyecto, es decir en la situación desfavorable al decidir no invertir implica obtener un flujo neutro (igual a cero), mientras que si se hubiera invertido se habrían perdido \$ 5.100.

En consecuencia no es apropiado utilizar la misma tasa de descuento cuando estamos en presencia de una opción que cambia la situación de riesgo de la inversión, esto puede demostrarse porque si consideramos al VAN del proyecto con flexibilidad como la resta de ambos [2125-(-1307.69)], el mismo ya no tendrá un retorno del 20% (la utilización del activo gemelo perdió utilidad).

Se puede finalizar resumiendo que la flexibilidad afecta el riesgo del proyecto y por lo tanto no es aplicable la misma tasa para su análisis, para solucionar este problema presentaremos a continuación dos técnicas:

VALUACIÓN DE LA OPCIÓN MEDIANTE EL MÉTODO DEL PORTAFOLIO REPLICADO

Para evitar la falta de correlación que se produce entre nuestro activo y su gemelo, utilizaremos la técnica denominada de *portafolio replicado*, que consiste en armar un portafolio que sea la réplica de los flujos de fondos que nos proporciona la opción, en este caso, diferir el pago de la inversión por un año.

El portafolio réplica está compuesto por dos activos negociables del mercado (formado por: “A”, cierta cantidad de acciones del activo gemelo y “B” un activo libre de riesgo), tales que produzcan los mismos retornos que muestra el proyecto y mediante él determinar una tasa ajustada al riesgo, es decir, su tasa de rendimiento debe ser igual a la requerida por el proyecto⁷.

Este análisis se sustenta en dos hipótesis de trabajo: la inexistencia de arbitraje y la inexistencia del activo negociado, “... que nos dice que el valor del activo subyacente es igual al valor presente de su flujo de fondos descontado sin flexibilidad, asumiendo que éste sería el valor de mercado del activo en el caso de transarse en los mercados de capitales. Esta aproximación parece razonable si pensamos que no debe existir algo más correlacionado con el activo que el activo mismo ...”⁸.

⁷ El CAPM generaliza este concepto afirmando que todos los títulos con el mismo beta deben tener el mismo costo de capital.

⁸ Conceptos extraídos del libro “Cálculo Financiero Aplicado” de López Dumrauf. Editorial La Ley SAEI, 2003, página 378 del capítulo mencionado.

Bajo estas condiciones se arman los flujos del portafolio réplica, en ambas situaciones de la siguiente manera:

$$SITUACION FAVORABLE \rightarrow A * 2772 + B * 1.04 = 5100$$

$$SITUACION DESFAVORABLE \rightarrow A * 924 + B * 1.04 = 0$$

Esto se presenta como un sistema de ecuaciones, de cuya resolución obtenemos que: la cantidad necesaria del activo gemelo es de 2.7597 (corresponde al valor de “A”) y el resultado negativo de “B” (-2451.92), está indicando una necesidad de financiamiento.

Finalmente, si multiplicamos la cantidad de acciones del activo gemelo por su precio actual y sumamos el activo libre de riesgo, obtenemos el valor del proyecto con flexibilidad: $2.7597 * 1540 + (-2451.92) = 1798.02$.

Con esta operación hemos pasado de tener un valor de proyecto sin flexibilidad de -1307.69, a uno de 1798.02 cuando consideramos la opción de diferir. Por lo tanto la determinación del valor de la opción real será igual a la resta de ambos, es decir el valor presente del proyecto con flexibilidad menos el valor presente del proyecto sin flexibilidad, con nuestros números nos queda: $1798.02 - (-1307.69) = 3105.71$.

Si quisiéramos establecer la tasa ajustada al riesgo haríamos:

$$1798.02 = \frac{5100 * 0.50 + 0 * 0.50}{1+i} \Rightarrow i = 0.3684, \text{ indicando este valor (mayor}$$

que el anterior) una alta incertidumbre en los flujos, y se debe tener en cuenta que ésta no es constante, sino que depende de la ubicación en el árbol (si éste reflejara un proyecto de un plazo mayor a un período).

Esta tasa hubiera representado la *tasa de descuento, ajustada al riesgo*, para los flujos de fondos esperados del proyecto con la opción de diferimiento, pero que nos era desconocida, por lo que podemos concluir:

- la flexibilidad cambia el riesgo del proyecto;
- la tasa de descuento ajustada al riesgo variará dependiendo del lugar del árbol donde nos encontremos.

El problema de esta propuesta es que no siempre encontramos un activo gemelo, y basándonos en la hipótesis de la *negatividad del activo negociado*, la solución consiste en plantear las ecuaciones con los flujos de fondos sin considerarlo. Es decir utilizando los flujos del proyecto, quedándonos en tal caso:

$$SITUACION FAVORABLE \rightarrow A * 15300 + B * 1.04 = 5100$$

$$SITUACION DESFAVORABLE \rightarrow A * 5100 + B * 1.04 = 0$$

La solución de este nuevo sistema nos arroja los siguientes valores para las incógnitas planteadas: “A”=0.50 y “B”=-2451.92. Si los reemplazamos considerando el precio actual del proyecto obtenemos: $0.50 * 8500 + (-2451.92) = 1798.08$, con los cuales el valor de opción será igual a 3105.71, que es exactamente igual al obtenido anteriormente⁹.

⁹ La opción también puede valuarse a partir de los flujos diferenciales que genera con respecto al proyecto sin flexibilidad.

VALUACIÓN DE LA OPCIÓN MEDIANTE EL MÉTODO DE NEUTRALIDAD ANTE EL RIESGO

La otra técnica a presentar, denominada *método de neutralidad ante el riesgo*, consiste en formar un portafolio con una acción del activo gemelo y la venta de una opción que hacen nulo el riesgo (por ejemplo, la ganancia en la acción se compensa con la venta de la opción). En la medida que la relación entre ambos activos sea más elevada arroja un coeficiente de cobertura (denominado *hedge*) más exacto, es decir se compensan ganancias con pérdidas y por ello decimos “libre de riesgo”.

Recordando las condiciones de nuestro proyecto, cuyo valor presente es de 8.500, que tiene un flujo para la situación favorable de 15.300 y para la desfavorable de 5.100; y considerando la opción de diferir esos flujos se convierten en 5.100 y 0 respectivamente, podemos obtener nuestro coeficiente de cobertura de la siguiente manera:

$$15300 - \text{Coeficiente} * 5100 = 5100 - 0 \quad \Rightarrow \quad \text{coeficiente} = 2$$

La explicación de la presente ecuación nos indica que un flujo de 15.300 genera un retorno de 5.100, mientras que si el flujo es de 5.100 el retorno será nulo.

El coeficiente nos indica que deberíamos emitir 2 opciones por cada acción para mantener el flujo del portafolio en 5.100, quedando de esta forma en condiciones de libre riesgo, siendo su valor presente el siguiente:

Valor actual del retorno, ya que es a un año y está libre de riesgo:

$$5100 * 1.04^{-1} = 4903.85, \text{ entonces:}$$

$8500 - 2 * \text{valor actual del proyecto} = 4903.85 \quad \Rightarrow \quad \text{v.a.p.} = 1798.075$, igual al presentado en párrafos anteriores.

Los fundamentos de este procedimiento están enunciados como:

- el valor presente no toma en cuenta la flexibilidad;
- el valor presente es el punto de partida;
- la hipótesis de inexistencia del activo negociado es la clave en el proceso de valuación de opciones reales.

Este valor también puede determinarse a través de las probabilidades neutras ponderadas¹⁰, que consiste en calcular las probabilidades de la siguiente manera:

$$p = \frac{(1 + \text{tasa libre de riesgo}) - \frac{\text{retorno mínimo}}{\text{precio actual}}}{\frac{\text{retorno máximo}}{\text{precio actual}} - \frac{\text{retorno mínimo}}{\text{precio actual}}} = \frac{1.04 - \frac{5100}{8500}}{\frac{15300}{8500} - \frac{5100}{8500}} = \frac{0.44}{1.20} = 0.3666...$$

$$q = 0.6333...$$

¹⁰ Estas probabilidades neutras no son objetivas, si pensamos en la ocurrencia de un evento, sino implícitas es decir, destinadas a descontar flujos a una tasa libre de riesgo.

Una reflexión que debemos realizar sobre estas probabilidades neutras ponderadas es que si bien nos darán retornos inferiores (la probabilidad para la mejor situación del mercado es menor que la subjetiva fijada en un 50%), al estar descontados a una tasa libre de riesgo, obtendrá los mismos resultados que utilizando el método del portafolio replicado, lo que puede demostrarse mediante el siguiente cálculo:

$$v.a.p. = \frac{5100 * 0.36 + 0 * 0.63}{1.04} = 1798.07, \text{ alcanzando como en todos los casos}$$

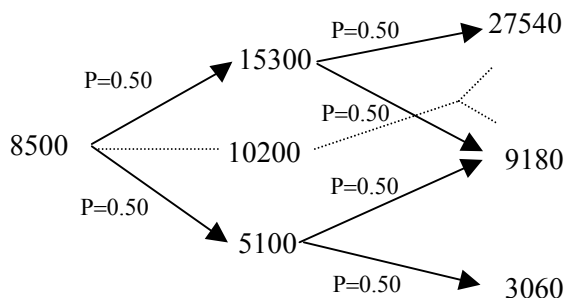
anteriores el mismo valor actual del proyecto, en consecuencia de la opción.

COMPARACIÓN DE AMBOS METODOS

La diferencia entre ambos métodos puede sintetizarse como:

- el método del portafolio replicado equivale a descontar los flujos de fondos riesgosos con tasas ajustadas al riesgo, mientras que
- el método de la neutralidad ante el riesgo descuenta flujos seguros con una tasa libre de riesgo.

Para poder identificar otras diferencias presentaremos un ejemplo para más de un período, donde la situación presenta la posibilidad de invertir \$ 10.200 adicionales, presentándose en el siguiente árbol de eventos los valores presentes que dicha inversión adicional genera:



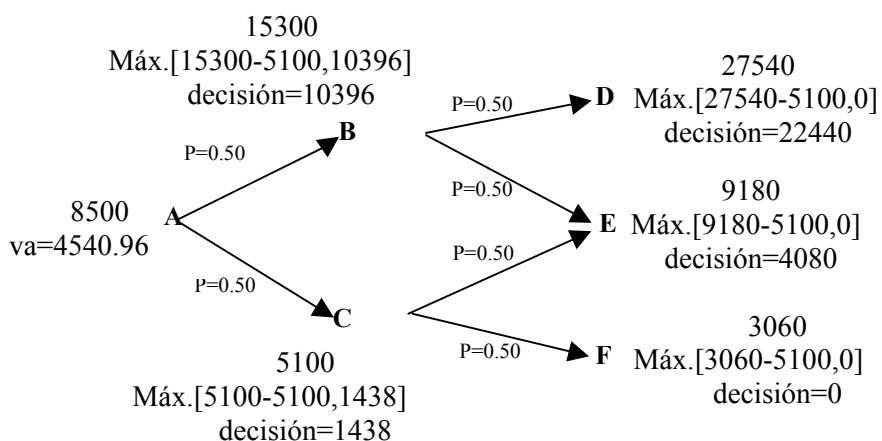
Representando los valores sobre la línea punteada los retornos esperados, determinados en función de los valores de cada nodo y calculados para cada posición del árbol de la siguiente manera:

$$10200 = \frac{27540 * 0.50 * 0.50 + 9180 * 0.50 + 3060 * 0.50 * 0.50}{1.20}$$

$$8500 = \frac{15300 * 0.50 + 5100 * 0.50}{1.20}$$

Si queremos tomar una decisión debemos transformar nuestro árbol de eventos en uno de decisión¹¹ de la siguiente manera:

¹¹ La diferencia consiste en que un árbol de decisión cuantifica los resultados de tomar una decisión en cada momento, mientras que uno de eventos nos muestra el conjunto de los eventos y el momento en que se producen.



Como puede observarse la opción de diferir la inversión tiene valor en los nodos D y E, por el contrario no se da la misma circunstancia en el nodo F que indica, para ese desenvolvimiento del mercado, la decisión de no reinvertir ya que de hacerlo estaríamos sufriendo una pérdida de \$ 2.040.

Bajo estas condiciones estamos en condiciones de calcular el valor de la opción utilizando las probabilidades neutras ponderadas, calculadas en el punto anterior del presente trabajo, de la siguiente manera (resultados que ya se encuentran incorporados en el árbol de decisión):

$$\text{Nodo B} \quad \mathbb{E} \quad \frac{0.36 \cdot 22440 + 0.63 \cdot 4080}{1.04} = 10396$$

$$\text{Nodo C} \quad \mathbb{E} \quad \frac{0.36 \cdot 4080 + 0.63 \cdot 0}{1.04} = 1438$$

$$\text{Nodo A} \quad \mathbb{E} \quad \frac{0.36 \cdot 10396 + 0.63 \cdot 1438}{1.04} = 4541$$

Con estos resultados considerando que el VAN del proyecto es negativo el valor de la opción se determinará de la siguiente manera: $4541 - (-1307.69) = 5848.69$

Si queremos verificar este resultado podemos hacerlo mediante la determinación de las ecuaciones respectivas, trabajando de forma diferencial obtenemos para cada nodo:

NODO B

$$\text{SITUACION FAVORABLE} \quad \textcircled{R} \quad A \cdot 27540 + B \cdot 1.04 = 22440$$

$$\text{SITUACION DESFAVORABLE} \quad \textcircled{R} \quad A \cdot 9180 + B \cdot 1.04 = 4080$$

$$(A \cdot 27540 + B \cdot 1.04 = 22440) - (A \cdot 9180 + B \cdot 1.04 = 4080) =$$

$$A \cdot 18360 + 0 = 18360 \quad \mathbb{E} \quad A = 1 \text{ y } B = -4903.85$$

$$\text{NODO B} \quad \textcircled{R} \quad 1 \cdot 15300 - 4903.85 = \boxed{10396.15}$$

NODO C

$$\text{SITUACION FAVORABLE} \textcircled{R} \quad A*9180 + B*1.04 = 4080$$

$$\text{SITUACION DESFAVORABLE} \textcircled{R} \quad A*3060 + B*1.04 = 0$$

$$(A*9180 + B*1.04 = 4080) - (A*3060 + B*1.04 = 0) =$$

$$A*6120 + 0 = 4080 \quad \text{E} \quad A = 0.6 \text{ y } B = -1961.54$$

$$\text{NODO C} \textcircled{R} \quad 0.6*5100 - 1961.54 = \boxed{1438.46}$$

NODO A

$$\text{SITUACION FAVORABLE} \textcircled{R} \quad A*15300 + B*1.04 = 10396.15$$

$$\text{SITUACION DESFAVORABLE} \textcircled{R} \quad A*5100 + B*1.04 = 1438.46$$

$$(A*15300 + B*1.04 = 10396.15) - (A*5100 + B*1.04 = 1438.46) =$$

$$A*10200 + 0 = 8957.69 \quad \text{E} \quad A = 0.8782 \text{ y } B = -2923.375$$

$$\text{NODO A} \textcircled{R} \quad 0.8782*8500 - 2923.375 = \boxed{4541}$$

También se podría calcular las tasas de retorno ajustadas al riesgo para cada nodo, siendo la que iguala los flujos de caja esperados al valor presente de la opción, tasas que variarán según sea la localización en el árbol por efecto de la variación del riesgo, lo que nos permite deducir que la técnica tradicional de los árboles de decisión no funciona adecuadamente porque mantiene, equivocadamente, la tasa de descuento constante.

Para nuestro ejercicio esas tasas ajustadas al riesgo (*TAR*) serían para cada nodo las siguientes:

$$\text{NODO B} \textcircled{R} \quad 10396 = \frac{0.50*22440 + 0.50*4080}{1 + \text{TAR}} \quad \text{E} \quad \text{TAR} = 0.2755$$

$$\text{NODO C} \textcircled{R} \quad 1438 = \frac{0.50*4080 + 0.50*0}{1 + \text{TAR}} \quad \text{E} \quad \text{TAR} = 0.4186$$

$$\text{NODO A} \textcircled{R} \quad 5848.65 = \frac{0.50*10396 + 0.50*1438}{1 + \text{TAR}} \quad \text{E} \quad \text{TAR} = 0.0117^{12}$$

CONSIDERACIONES A LAS QUE NOS LLEVAN LAS VALUACIONES MENCIONADAS

De lo desarrollado hasta el momento, surge que ambas técnicas y sus diferentes propuestas nos llevan al mismo resultado, concluyendo que es indiferente cuál aplicar.

Que las diferencias entre los métodos pueden resumirse de la siguiente manera:

¹² Se utiliza el valor presente de la opción según algunas de las valuaciones efectuadas en pasos anteriores, considerando que la *TAR* es: “la tasa que iguala los flujos de caja esperados al valor presente de la opción”. De haberse utilizado el valor presente del flujo a este nodo, \$ 4540.96; la *TAR* hubiera tomado un valor de 0.2931 pero éste no estaría respetando la definición indicada.

- en el método del portafolio replicado se refleja la alteración del riesgo al determinarse una tasa de descuento ajustada al riesgo que varía de nodo a nodo;
- una ventaja de determinar las probabilidades neutras en relación al riesgo es la facilidad de introducir su valor en cálculos sucesivos;
- las probabilidades neutras en relación al riesgo no dependen de la ubicación en el árbol, sino que están en función a una tasa libre de riesgo;
- las probabilidades objetivas son variables, al intervenir en su determinación la probabilidad compuesta.

Finalmente como corolario de lo analizado podemos concluir:

- las probabilidades objetivas varían de acuerdo al momento del árbol donde se encuentre el decididor, mientras que si se utiliza probabilidad neutra en relación al riesgo su valor se mantiene constante;
- la tasa de descuento ajustada al riesgo varía de nodo a nodo, reflejando en los retornos la variación del riesgo.

Más allá de la utilidad que estas metodologías de cálculo producen en la valuación de estas opciones, observamos que lo que se busca es operar la incertidumbre con herramientas que traten de obviarla asemejando estas situaciones a ambientes con riesgo (de allí que todo el análisis se realiza en función a diferentes tipos de probabilidades), lo cual es perfecto bajo esas condiciones pero inadecuada cuando el ambiente es incierto como trataremos de demostrar en los puntos siguientes.

INCORPORACIÓN DE LA BORROSIDAD A LOS MÉTODOS PLANTEADOS

Nuestra primera idea es analizar qué cambios se producirían si se trabajan las herramientas planteadas incorporando borrosidad, resolviendo las mismas mediante la aplicación de matemática borrosa. Para simplificar el desarrollo trabajaremos solamente con los valores del proyecto a un año.

Al respecto la primera consideración sería qué elementos de los propuestos pueden ser inciertos, y de la forma que se ha planteado parecería que podríamos definir como borrosos los flujos de fondos, considerando que se conocen los porcentajes de ocurrencia de los dos estados analizados (favorable y desfavorable), dando por supuesto que existe certeza tanto en los datos del activo gemelo como en la inversión inicial, por lo tanto, nuestro ejemplo podría plantearse como:

	Flujo de fondos	Resultado elegido considerando flexibilidad
Mercado favorable	(14700,15300,16200)	(4500,5100,6000)
Mercado desfavorable	(4900,5100,5400)	0

Con los cuales podemos definir que el valor presente de los flujos sin flexibilidad será: (8167,8500,9000), el que fuera actualizado utilizando la tasa del activo gemelo

considerando que todos flujos favorables y desfavorables se encuentran perfectamente correlacionados y por ésa razón la tasa del 20% se les puede aplicar.¹³

En consecuencia el *VAN* definido en función de los datos propuestos, y considerando que la inversión inicial es cierta y a desembolsar a un año sería:

$$(8167,8500,9000) - 10200 * 1.04^{-1} = (-1640.69, -1307.69, -807.69)$$

Planteados los datos a través de un árbol de decisión (obviando su presentación en este desarrollo), el *VAN* para el proyecto con flexibilidad sería:

$$\frac{(4500,5100,6000) * 0.50 + 0 * 0.50}{1.20} = (1875,2125,2500), \text{ notoriamente diferente al anterior.}$$

Veamos ahora qué sucede con las dos herramientas planteadas:

Determinación a través del método del portafolio replicado

Primero definiremos los flujos del portafolio a través de las dos ecuaciones, las que se representan por los siguientes valores:

$$SITUACION FAVORABLE \rightarrow A * (14700,15300,16200) + B * 1.04 = (4500,5100,6000)$$

$$SITUACION DESFAVORABLE \rightarrow A * (4900,5100,5400) + B * 1.04 = 0$$

La resolución de este sistema de ecuaciones nos da un único valor para “A” de (0.3846,0.50,0.69), pero una incongruencia para “B” que toma diferentes valores según en qué recta sea reemplazado, es decir obtenemos: (-6415.8,-2452,332.8) o (-3580.9,-2452,-1812), según se haya utilizado la primer o segunda recta respectivamente.

De acuerdo a estos resultados tenemos dos valores para el proyecto considerando la opción de diferir, que serán: (-3274.8,1798.1,6540) y (-439.88,1798.1,4395) respectivamente para cada resultado del inciso anterior.

Por supuesto si nuestra opción se valúa como la resta de las valuaciones de ambos proyectos, considerando o no la flexibilidad, tendremos dos posibles valores.

Por tal motivo este método tendría que descartarse porque sumaría subjetividad a la decisión, ya que se debería elegir entre dos posibles *NBT* con diferente grado de borrosidad.¹⁴

Determinación a través del método de la neutralidad ante el riesgo

¹³ Esta propuesta se introduce para hacer el análisis más sencillo, pero si los flujos no estuviesen perfectamente correlacionados habría que buscar diferentes activos que los representen. De no concretarse ésta situación la tasa debería fijarse como un *NBT* y todos los cálculos propuestos tendrían una complicación adicional.

¹⁴ Se ha planteado directamente la solución considerando los flujos del proyecto y no los del activo gemelo, porque siendo éste un dato cierto, se obtendría el mismo resultado que el obtenido anteriormente. Conclusión: si podemos determinar un activo gemelo se trabaja como en el caso original.

En este caso el primer paso consiste en determinar el coeficiente de cobertura que iguala los flujos, siendo el mismo igual a: (1.6111,2,2.388).

Ahora obtenemos los flujos actualizados que pretende el portafolio, libre de riesgo, representados por (4327,4904,5769), estando los mismos calculados considerando la flexibilidad y actualizados por la tasa libre de riesgo (del 4%).

En definitiva, lograríamos obtener el valor de opción de la siguiente manera:

$$(1004.1,1798.1,2901) - (-1640.69,-1307.69,-807.69) = (1811.79,3105.79,4541.69).^{15}$$

Finalmente, nos queda por introducir el concepto de incertidumbre en la determinación de ocurrencia de los dos estados futuros del mercado, en dicho caso ya no contaríamos con un flujo para la situación favorable y otro para la desfavorable, sino que tendríamos definido un *NBT* que contemple toda la situación, y en función de los datos anteriores podría ser: (5100,10200,15300).

Si consideramos como cierta la inversión inicial, y mantenemos constante la tasa de descuento a los efectos de poder obtener alguna conclusión, podríamos definir como flujos de ingresos con flexibilidad los siguientes: (-5100,0,5100).

Trabajando con estos elementos podríamos determinar:

$$\text{Valor presente de los flujos} \rightarrow (4250, 8500, 12750)$$

$VAN_1 \rightarrow (-5950, -1700, 2250)$, considerando que la inversión inicial se abona en el momento cero.

$VAN_2 \rightarrow (-5557.69, -1307.69, 2942.31)$, considerando que la inversión inicial se abona al año pero no tiene en cuenta la flexibilidad.

$$\text{Valor presente con flexibilidad} \rightarrow (-4903.86, 0, 4903.85)$$

$$\text{Valor de la opción} \rightarrow (-4903.86, 0, 4903.85) - (-5950, -1700, 2250) = (-7153.85, 1700, 10853)$$

Del análisis de estos valores, y en comparación con los obtenidos en el punto anterior podemos concluir que la falta de información produce una mayor incertidumbre (visiblemente expuesta por la mayor borrosidad de nuestro *NBT*). También, que la misma tiene un costo implícito que podría surgir de la comparación de ambos valores y permitiría al decidor establecer si está dispuesto a correr con ese gasto adicional o, por el contrario, prefiere correr con los riesgos de esa posible inversión, aún con flexibilidad con tan alto grado de incertidumbre.

CONCLUSIONES FINALES

En función de lo expuesto arribamos a las siguientes conclusiones:

- ✓ Que sería viable introducir borrosidad a la herramienta denominada *método de la neutralidad ante el riesgo*.

¹⁵ El cálculo de las probabilidades neutras ponderadas no es viable por las propiedades de la resta de los *NBT*.

- ✓ Que mayor información reduce la incertidumbre, otorgando al decidor mejores herramientas para poder valorar objetivamente los proyectos que podría llevar adelante.
- ✓ Que si bien el trabajo, para el tratamiento con incertidumbre, fue presentado para una opción de diferimiento a un año, los mismos procedimientos serán viables para la valuación de todas las opciones y para proyectos superiores a un año, siendo por supuesto válidas las conclusiones indicadas en los párrafos precedentes.

Que estas conclusiones no podrían comprenderse totalmente si el lector no posee conocimientos básicos de Matemática Financiera, como son los relacionados a tasas, descuentos, capitalizaciones y actualizaciones; como otros temas incluidos relacionados a la Estadística y otras disciplinas.

Por lo tanto entendemos que hemos cumplido nuestro objetivo, reafirmando que los contenidos de nuestra asignatura son de constante aplicación en el desempeño profesional futuro de nuestros alumnos porque:

- las opciones reales aparecen en todos los negocios, sin distinción de su magnitud;
- el *VAN*, que utiliza conceptos financieros, es insuficiente para valorar un proyecto de inversión, pero el conocimiento básico de su funcionamiento es indispensable;
- el concepto de flexibilidad nos introduce en la temática de determinar el momento apropiado para tomar una decisión, base de la traslación en el tiempo como forma de determinar el valor del dinero

BIBLIOGRAFÍA

- Brealey, Richard A., Myers, Stewart C. y Marcus, Alan J.; 1.999; *Principios de Dirección Financiera*; McGraw-Hill.
- Díaz Tinoco, Jaime y Hernández Trillo, Fausto; 2.000; *Futuros y opciones financieras. Una introducción*; Noriega Ediciones.
- López Dumrauf, Guillermo; 2.003; *Cálculo Financiero Aplicado*; Editorial "La Ley S.A.E.I".
- Mallo, Paulino E., Artola, María A., Martínez, Diego, Galante, Marcelo, Pascual, Mariano E. y Morettini, Mariano; 2.003; "Teoría de las Decisiones en Situación de Incertidumbre"; Anales del X Congreso de la Sociedad Internacional de Gestión y Economía Fuzzy; León, España.
- Suárez Suárez, Andrés S.; 1.996; *Decisiones Óptimas de Inversión y Financiación en la Empresa*; Ediciones Pirámide.
- Mallo, Paulino E., Artola, María A., Galante, Marcelo, Pascual, Mariano E., Morettini, Mariano y Busetto, Adrián; 2.004; "Incertidumbre y flexibilidad en la valuación de opciones reales"; Anales del XI Congreso de la Sociedad Internacional de Gestión y Economía Fuzzy; Messina, Italia.